november 2000 ~ nr 3 ~ jaargang 76

Mathematisch modelleren



EUCLIDES

Vakblad voor de wiskundeleraar

orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren



3

NOVEMBER 2000 JAARGANG 76

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen naar:
Kees Hoogland
Veldzichtstraat 24, 3731 GH De Bilt
e-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen:

• goede afdruk met illustraties/foto's/formules op juiste plaats of goed in de tekst aangegeven.
• platte tekst op diskette of per e-mail: WP, Word of ASCII.
• illustraties/foto's/formules op aparte vellen: genummerd, zwart/wit, scherp contrast.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

www.nvvw.nl

Voorzitter
Drs. M. Kollenveld
Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
tel. 070-3906378
e-mail: M.Kollenveld@nvvw.nl
Secretaris
W. Kuipers
Waalstraat 8, 8052 AE Hattem
tel. 038-4447017
e-mail: W.Kuipers@nvvw.nl
Ledenadministratie
Mw. N. van Bemmel-Hendriks
De Schalm 19, 8251 LB Dronten
tel. 0321-312543
e-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Colofon

ontwerp Groninger Ontwerpers
produktie TiekstraMedia, Groningen
druk Giethoorn Ten Brink, Meppel

Contributie

Contributie per ver. jaar: *f* 80,00
Studentleden: *f* 40,00
Leden van de VVWL: *f* 55,00
Lidmaatschap zonder Euclides: *f* 55,00
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden geven zich op bij de ledenadministratie.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Abonnementsprijs voor personen: *f* 85,00 per jaar.
Voor instituten en scholen: *f* 240,00 per jaar.
Betaling geschiedt per acceptgiro.
Losse nummers op aanvraag leverbaar voor *f* 30,00. Opzeggingen vóór 1 juli.

Advertenties

Informatie, prijsopgave en inzending:
L. Bozuwa, Merwekade 90
3311 TH Dordecht, tel. 078-639 08 90
fax 078-6390891
e-mail: lbozuwa@worldonline.nl
of F. Mahieu, Dommeldal 12
5282 WC Boxtel, tel. 0411-67 34 68

INHOUD

[Van de redactietafel]

In dit nummer treft u wederom een groot aantal bijdragen aan van zeer uiteenlopende soort.
Boekbesprekingen, verslagen van conferenties en wedstrijden, recreatie, bespiegelingen over het onderwijs, actuele maatregelen rond wiskunde in de Tweede Fase en klassenervaringen met de grafische rekenmachine. Dat bewijst maar eens te meer hoe levend het schoolvak wiskunde is.
De Tweede Fase is volop aan de gang en er tekent zich langzaam bij wiskunde al iets af als een “examentraditie”: dat wil zeggen, een aantal gemeenschappelijke meningen hoe het programma efficiënt doorlopen kan worden.
Het vmbo staat nog maar aan het begin van een grote verandering. Daarover hieronder mee.

Vmbo

De veranderingen in het vmbo vragen op dit moment van de scholen de grootste inspanning. De leerlingen die nu in de tweede klas zitten zullen volgend schooljaar in de derde klas in volle omvang te maken krijgen met de nieuwe structuur, de nieuwe regelingen, de nieuwe programma’s en de veranderende leerlingenstromen die allemaal inherent zijn aan het nieuwe vmbo.
Voor wiskunde liggen de belangrijkste wijzigingen niet zo zeer in het examenprogramma. Dat is in 1993 al ingrijpend gewijzigd. Dus ook in het nieuwe examenprogramma komen weer de bekende onderwerpen terug als rekenen, algebra, meetkunde en informatieverwerking en statistiek.
Wat wel relatief nieuw is voor wiskunde is de meer verplichte aandacht die GWA en praktische opdrachten moeten krijgen.
Er is al heel veel materiaal daaromtrent te vinden in de nieuwe edities van de boeken en op allerlei websites. Toch houdt de redactie zich van harte aanbevolen voor bijdragen over korte praktische opdrachten op het niveau van 3- en 4-vmbo, die ook daadwerkelijk in de klas zijn uitgeprobeerd.
Door publicatie daarvan kunt u veel collega’s een steun in de rug zijn.

Informatie over vmbo op internet

Bent u geïnteresseerd in allerlei informatie rond het vmbo, dan kunt u dat tegenwoordig vrijwel allemaal vinden op internet.
Ik noem u maar even de twee belangrijkste websites:
http://www.vmbo-examengids.nl
en
http://www.vmbo-loket.nl
Beide websites zijn nog volop in ontwikkeling. Als u daar regelmatig gaat kijken, dan zult u die ontwikkeling kunnen meemaken.
Via het vmbo-loket kunt u ook informatie vinden over het grote nascholingsproject *Scholen in vmbo*. Naast een inleidend informatief basisblok uitgevoerd op de school, kan er gekozen worden tussen allerlei vervolgblokken.
Mogelijk kunt u als wiskundedocent of wiskundesectie invloed uitoefenen op uw directie om vervolgblokken te kiezen waaraan bij u op dit moment de meeste behoefte is. Ik vermoed dat dat voor wiskundesecties vooral Praktische Opdrachten en het opstellen van een Programma van Toetsing en Afsluiting (PTA) zullen zijn.

Tot slot

De redactie van Euclides probeert u op de hoogte te houden van alle ontwikkelingen. U kunt daarbij helpen door uw ervaringen in te zenden en met andere collega’s te delen. Bijdragen over ervaringen uit de klas worden zeer verwelkomd.

Kees Hoogland

6de Mathematische Modelleercompetitie Maastricht 2000

[Boukje Janssen en Jacob Perrenet]

Op zaterdag 22 januari 2000 werd de zesde Mathematische Modelleercompetitie Maastricht gehouden. De organisatie was in handen van medewerkers van de opleidingen Econometrie van de Universiteit Maastricht (UM).

Inleiding

Twee uur waren 112 leerlingen in 26 teams fanatiek bezig met vijf opgaven. De deelnemers waren vijfde- en zesdeklassers vwo, afkomstig van 15 scholen uit Nederland en België. Ruim de helft van het aantal deelnemers kwam uit België. De begeleidende leerkrachten werden onthaald op lezingen over onderwerpen uit de Econometrie en de Kennistechnologie, gegeven door docenten van deze beide exacte opleidingen van de UM. Achtereenvolgens passeerden de revue: de materieelplanning bij de spoorwegen, populatiedynamica in natuurparken, het verdelen van perfect deelbare goederen en een aansluitingsmodule in het kader van Oriëntatie op Studie en Beroep.
Nederland was dit jaar in mindere mate vertegenwoordigd, deels verklaarbaar door een vergelijkbare wedstrijd in Nederland een dag eerder. Verwonderlijk was dan ook niet dat België zowel met de eerste als met de tweede plaats ging strijken: respectievelijk de Stedelijke Humaniora uit Dilsen en het K.A.I. uit Oostende. Eervolle derde werd het Maaswaal College uit Wychen. Het winnende team bestond uit Sabine Bertho, Liesbeth Jame, Petra Meurs, Wim Welkenhuyzen en Sophie Lemmens.
Hieronder geven we eerst de vijf opgaven en daarna beschrijven we globaal de oplossingen en de resultaten.

De opgaven

Opgave 1: On the road again
Vier plaatsen A, B, C en D zijn ten opzichte van elkaar gelegen in een vierkant met zijden van elk 25 km lang *(figuur 1)*.
Voor de ontwikkeling van de regio is het belangrijk dat A, B, C en D onderling verbonden worden met een nieuw wegennet. Vanwege de milieuproblematiek vindt men het zinvol om dit zo te doen dat het totale aantal kilometers asfalt van het wegennet minimaal is.
Bepaal een zo goed mogelijk wegennet (dus met een zo klein mogelijke totale lengte) en bereken de bijbehorende lengte.

Opgave 2: Heimelijk verliefd
Arie is heimelijk verliefd op Barbara en zou graag een briefje bij haar in de brievenbus doen. Hij weet wel in welke straat Barbara woont, maar hij is er nog niet achter op welk huisnummer dat is. Het enige dat hij weet is dat de huizen genummerd zijn van 8 tot en met 100. Hij vraagt aan Barbara: ‘Is jouw huisnummer hoger dan 50?’ en Barbara geeft antwoord, maar zij liegt. Vervolgens vraagt Arie: ‘Is jouw huisnummer een veelvoud van 4?’, maar Barbara liegt ook deze keer. Dan vraagt Arie: ‘Is jouw huisnummer een kwadraatgetal?’ en dit keer beantwoordt Barbara de vraag naar waarheid. Tenslotte vraagt Arie: ‘Is het eerste cijfer van je huisnummer een 3?’ Geduldig

beantwoordt Barbara deze vraag van Arie ontkennend, maar we weten niet of ze wel of niet de waarheid spreekt. Arie reageert daarop in ieder geval met de opmerking: 'Nu weet ik je huisnummer!' Als hij haar vervolgens dit nummer noemt, blijkt hij het echter fout te hebben. Wat is haar huisnummer?

Opgave 3: Stoeien met kwadraten

Wie verbaast zich erover dat elk jaar 365 dagen telt? De getalloloog zeker niet, want die meent dat dat te maken heeft met getallenharmonie. Het getal 365 is

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2 \quad (= 365)$$

Dit is niet de enige bijzondere kwadratenvergelijking, want jullie weten allemaal dat:

$$3^2 + 4^2 = 5^2 \quad (= 25)$$

Er is ook een kwadratenvergelijking met drie termen aan de rechterkant:

$$21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2 \ (= 2030)$$

Het kenmerkende van deze vergelijkingen is dat, wanneer de kwadraten in aangesloten en oplopende volgorde geschreven worden, er rechts van het gelijkteken precies één term minder staat dan aan de linkerkant.
Laat zien dat het voor iedere $n \in \mathbb{N}$ mogelijk is om een soortgelijke kwadratenvergelijking op te stellen (dus met aangesloten en oplopende kwadraten), waarbij er precies n kwadraten rechts van het gelijkteken staan en er precies $n + 1$ kwadraten aan de linkerkant zijn. (Hint: zoek een verband tussen het aantal termen rechts, n, en de eerste term aan de linkerkant!).

Opgave 4: Pudding verdelen

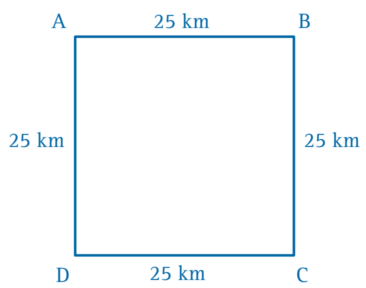
Een moeder heeft twee kinderen: Ans (a) en Bart (b). Aan het einde van de maaltijd haalt ze een puddinkje uit haar koelkast om haar kroost te verwennen. Hoe zal ze de pudding verdelen? Ieder kind heeft zijn favoriete hoeveelheid en hoe dichter het daarbij in de buurt komt des te beter. Kinderen dienen wat ze krijgen helemaal op te eten, maar gelukkig hoeft het puddinkje niet in zijn geheel geconsumeerd te worden: overschotten kunnen in de koelkast bewaard worden. Wanneer we de favoriete hoeveelheden van beide kinderen aanduiden met respectievelijk P_a en P_b, betekent dat laatste dat er geen probleem is als $P_a + P_b \leq 1$.

Een *verdeelregel* schrijft voor alle mogelijke combinaties van $P_a + P_b \in [0, 1]$ een verdeling voor. Een verdeelregel noemen we *efficiënt* wanneer zij nooit een verdeling voorschrijft die voor beide kinderen verbeterd zou kunnen worden.

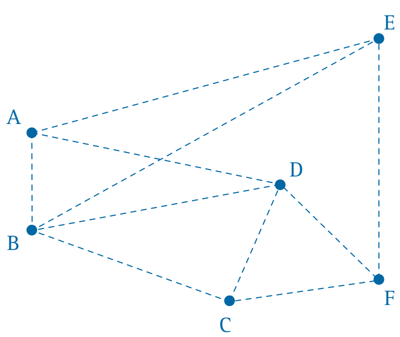
A. Neem de volgende verdeelregel: als $P_a + P_b \leq 1$ dan krijgen de kinderen respectievelijk P_a en P_b en anders krijgen ze ieder $\frac{1}{2}$. Laat zien dat deze verdeelregel niet efficiënt is. In welke gevallen kan de resulterende verdeling voor beide kinderen redelijk verbeterd worden?

Het voorkomen van afgunst is een belangrijke criterium bij het verdelen. We zeggen dat een verdeling afgunstvrij is als geen van beide kinderen liever het deel van het andere kind zou hebben. Een verdeelregel noemen we *afgunstvrij* wanneer zij altijd een afgunstvrije verdeling voorschrijft.

1



2



B. Neem de volgende ‘proportionele’ verdeelregel: als $P_a + P_b \leq 1$, dan krijgen de kinderen respectievelijk P_a en P_b en anders

$$\frac{P_a}{P_a + P_b} \text{ en } \frac{P_b}{P_a + P_b}.$$

Laat zien dat deze verdeelregel niet afgunstvrij is.
C. Kun je een verdeelregel verzinnen die zowel efficiënt als afgunstvrij is?

Opgave 5: Internet netwerk design

Internetgebruik is in de laatste jaren enorm gegroeid. Mede hierdoor en door de verschillende karakters van telefonie- en internetverkeer zijn de klassieke telecommunicatienetwerken niet toereikend voor de verwachte hoeveelheid internetverkeer. Deze ontwikkelingen richten aandacht op de aanleg van nieuwe telecommunicatienetwerken exclusief voor internetverkeer.
Hier bekijken we een gedeelte van zo’n internet-netwerk (*zie figuur 2*). De punten A-F zijn (verzamelingen) heavy Internet gebruikers. De vraag per *gebruiker* is gegeven in een verkeersmatrix (zie tabel 1). Deze laat bijvoorbeeld zien dat de internetvraag van A naar B 3 Gigabit per seconde (Gbps) is. Om aan deze vraag te voldoen kunnen (een of meerdere) *kabels* worden gelegd op de aangegeven (onderbroken) lijnen. Een *kabel* tussen twee gebruikers geeft de beschikking over een *capaciteit van 5 Gbps in beide richtingen*!
Aan een A → E vraag van 2 Gbps kan worden voldaan door een 5 Gbps kabel te plaatsen tussen A en E. Ook kan (een deel van) de vraag via mogelijk bestaande kabels via A-B-E worden geleid. Dit toont meteen het voordeel van internetverkeer: de vraag mag via de *verschillende routes* worden geleid, zolang de gezamenlijke capaciteit van de verschillende routes maar voldoende is.

Echter, zoals in elk concurrerend bedrijf is het de kunst om de diensten aan te bieden tegen minimale kosten. In dit geval zijn de kosten van de kabels (à *f* 10.000,- per kabel) en routers (à *f* 25.000,- per router). Gelukkig dienen deze routers alleen geplaatst te worden als op een punt méér dan 4 kabels aangesloten zijn (nl. dan volstaat de kleine router van de klant niet meer!).

Tabel 1

van/naar	A	B	C	D	E	F
A		3			2	
B			6		4	
C				4		5
D	4					
E			7			2
F		3				

De opdracht is om het netwerk zodanig te ontwerpen dat alle klanten worden bediend en wel tegen minimale kosten! (Als bewijs voor toelaatbaarheid van de oplossing kunnen alle stromen worden gegeven).

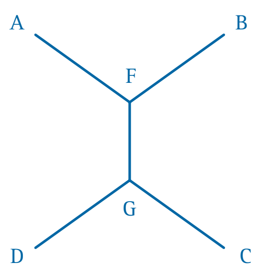
Oplossingen en resultaten

Opgave 1: On the road again

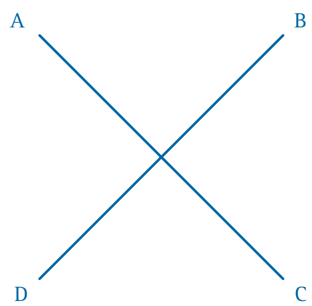
Ondanks dat dit een vrij moeilijke opgave bleek, waren er toch enkele groepen die op het goede idee waren gekomen. Het kortste wegennet zou er als in figuur 3 moeten uit zien:
Met AF = BF = DG = CG = 14,44 km en
FG = 10,57 km. De totale lengte van het wegennet is nu 68,31 km.
De groepen die erachter waren gekomen dat het wegennet ongeveer deze vorm zou moeten hebben, hadden ook allemaal het kortste wegennet gevonden. Waarom dit echt het kortst mogelijke wegennet is, had niemand beargumenteerd. Een bewijs is te geven met behulp van het zogeheten ‘punt van Fermat’ (zie hiervoor *http://www.math.unimaas.nl/Events/index.htm*).

Een veel gegeven, niet optimale oplossing van 70,7 km was: *figuur 4*.

3



4



Opgave 2: Heimelijk verliefd

Op 3 groepen na hadden alle groepen het juiste antwoord gevonden. De groepen die het juiste antwoord hadden gevonden, hadden ongeveer de volgende tabel gemaakt: (zie *tabel 2*).

Tabel 2

vraag: 1	2	3	4
Groter dan 50	Veelvoud van 4	Kwadraat?	Corresponderende mogelijkheden
ja	ja	ja	64, 100
ja	ja	nee	52, 56, 60, 68, 72, 76, 80, 84, 88, 92, 96
ja	nee	ja	81
ja	nee	nee	51, 53, 54, 55, 57, 58, 59, 61, 62, 63, 65, 66, 67, 69, 70, 71, 73, 74, 75, 77, 78, 79, 82, 83, 85, 86, 87, 89, 90, 91, 93, 94, 95, 97, 98, 99
nee	ja	ja	16, 36
nee	ja	nee	8, 12, 20, 24, 28, 32, 40, 44, 48
nee	nee	ja	9, 25, 49
nee	nee	nee	10, 11, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 26, 27, 29, 30, 31, 33, 34, 35, 37, 38, 39, 41, 42, 43, 45, 46, 47, 50

Arie noemde als huisnummer 16. Als we naar de tabel kijken, zou Arie denken het goede huisnummer hebben gegokt of hij zou door deze vraag zeker het goede huisnummer te weten komen. Hierdoor komen wij te weten dat de antwoordenreeks van Barbara startte met Nee-Ja-Ja en de goede antwoorden hadden moeten zijn Ja-Nee-Ja. Dit houdt in dat er maar één mogelijkheid resteert voor het huisnummer, namelijk 81.

Opgave 3: Stoeien met kwadraten

Er was geen enkele groep die deze vraag volledig goed beantwoord had. Bewijzen blijkt lastig. Het gestelde kon als volgt bewezen worden.
Laten we met x de eerste term aangeven in de te zoeken kwadratenvergelijking met n termen rechts. De vraag komt dan neer op het zoeken naar oplossingen van de vergelijking

$$x^2 + (x+1)^2 + \ldots + (x+k)^2 + \ldots + (x+n)^2 =$$
$$(x+n+1)^2 + \ldots + (x+n+k)^2 + \ldots + (x+2n)^2$$

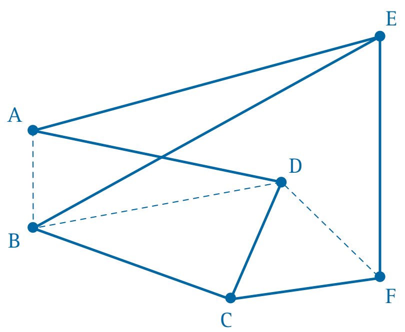
De vergelijking lijkt door zijn veelheid aan termen lastig om uit te werken, maar de kunst is nu om het rekenwerk te vereenvoudigen door de termen handig te groeperen. De op te lossen vergelijking komt overeen met:

$$x^2 = (x+n+1)^2 - (x+1)^2 + \ldots + (x+n+k)^2 -$$
$$(x+k)^2 + \ldots + (x+2n)^2 - (x+n)^2$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (x+n+k)^2 - (x+k)^2$$

De term $(x+n+k)^2 - (x+k)^2$ schrijven we helemaal uit:
$(x+n+k)^2 - (x+k)^2 = 2nx + 2nk + n^2$
Dit vullen we in:

$$x^2 = \sum_{k=1}^{n} (2nx + 2nk + n^2) = 2n^2x + n^3 + 2n\sum_{k=1}^{n} k$$

5



Voor de sommatie van de eerste n natuurlijke getallen geldt:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$\frac{n(n+1)}{2}$ invullen voor $\sum_{k=1}^{n} k$, en alle termen naar dezelfde kant brengen levert de volgende tweedegraads vergelijking op in de onbekende x:

$$x^2 - 2n^2x - n^3 - 2n.\frac{n(n+1)}{2} =$$

$$x^2 - 2n^2x - 2n^3 - n^2 = 0$$

De abc-formule levert twee oplossingen op:
$x = -n$ en $x = 2n^2 + n$
De eerste oplossing heeft in deze context geen betekenis, maar de tweede oplossing levert ons het bewijs dat er een kwadratenvergelijking bestaat voor elk aantal termen rechts van het gelijkteken.
Bijvoorbeeld voor vijf termen rechts moet de beginterm x gelijk zijn aan 55:

$$55^2 + 56^2 + 57^2 + 58^2 + 59^2 + 60^2 =$$
$$61^2 + 62^2 + 63^2 + 64^2 + 65^2 = 19855$$

Opgave 4: Pudding verdelen

Er was bijna geen enkele groep die het volle aantal punten behaald had voor deze vraag. Ongeveer de helft van het aantal groepen had wel het volle aantal punten bij vraag a) en b). De oplossing was:
A. Deze verdeelregel is niet efficiënt want altijd als $P_a + P_b > 1$ en $P_a < \frac{1}{2}$ of $P_b < \frac{1}{2}$, kan de verdeling voor beide kinderen verbeterd worden door Bart of Ans meer te geven.
B. Neem bijvoorbeeld $P_a = \frac{3}{4}$ en $P_b = 1$, dan is de resulterende verdeling $\frac{3}{7}$ voor Ans en $\frac{4}{7}$ voor Bart, maar Ans heeft liever $\frac{4}{7}$.
C. Als $P_a + P_b \leq 1$, dan geef Ans en Bart respectievelijk P_a en P_b. Anders, geef Ans en Bart respectievelijk $x_a = \min(P_a, t)$ en $x_b = \min(P_b, t)$.

Opgave 5: Internet netwerk design

Bij deze opgave dachten de meeste groepen wel in de goede richting, maar er was geen enkele groep die de vraag volledig goed beantwoordde. Een mogelijkheid is om het eerst een ondergrens voor het aantal kabels te zoeken. Als we voor iedere gebruiker het maximum van vraag en aanbod nemen, kunnen we de volgende tabel maken: (zie *tabel 3*).

Tabel 3

	Instroom	Uitstroom	Min. Kabels
A	4 Gbps	5 Gbps	1
B	6 Gbps	10 Gbps	2
C	13 Gbps	9 Gbps	3
D	4 Gbps	4 Gbps	1
E	6 Gbps	9 Gbps	2
F	7 Gbps	3 Gbps	2
Met een totaal van 1 + 2 + 3 + 1 + 2 + 2 = 11 kabels.			

Omdat elke kabel twee punten verbindt, zal elke *toegelaten oplossing* minstens 11/2 = 6 kabels gebruiken. Er is een oplossing met 7 kabels en geen enkele router. Omdat 7 dicht bij de ondergrens ligt, kunnen we er zeker van zijn dat deze oplossing heel dicht bij de optimale oplossing ligt of misschien zelfs wel een optimale oplossing is. De oplossing ziet er dan uit als in figuur 5.

Met afgelegde routes per stroom:

AEB 3	FEB 1	EFC 3	EF 2
BE 4	AE 2	BC 5	
DA 4	CD 4	BEADC 1	
FCB 2	EADC 4	CF 5	

Vervolg

De zevende Mathematische Modelleercompetitie Maastricht zal worden gehouden op zaterdag 20 januari 2001. Men kan zich opgeven bij Karin van den Boorn van het secretariaat Kwantitatieve Economie, Faculteit der Economische Wetenschappen en Bedrijfskunde, Universiteit Maastricht, Postbus 616, 6200 MD Maastricht (NL), 0(031)43-388 3834 of ...3835. Algemene informatie is te verkrijgen bij Dr. Frank Thuijsman van de capaciteitsgroep Wiskunde (...3489) of Prof. Hans Peters van de capaciteitsgroep Kwantitatieve Economie (...3834) en op *http://www.math.unimaas.nl/ onder 'Events'.*

Algebra, de brug tussen getallen en meetkunde

[Roelof Datema]

M. Riemersma

M. Riemersma

Epsilon Uitgaven, Utrecht, 1994

176 pag.; prijs fl. 37,50; ISBN 90504100383

Iedereen die zich altijd al afgevraagd heeft wat klassieke constructieproblemen met getallen te maken hebben, vindt in dit boek het antwoord op die vraag: algebra. Het is daarom niet verwonderlijk dat in het achttien hoofdstukken tellende boek de eerste vijftien gewijd zijn aan uitleg over allerlei zaken die te maken hebben met getaltheorie. We worden binnengeleid in de grondbeginselen van de elementaire getaltheorie, maar al snel zitten we in de sneltrein langs ringen en lichamen, restklassenlichamen, algebraïsche en transcendente getallen en irreducibiliteitsonderzoek. We eindigen in hoofdstuk vijftien dat de titel ‘Het paradijs van Cantor’ draagt.
Nu kunnen potlood, liniaal en passer uit de kast gehaald worden: het construeren kan beginnen. Op een duidelijke manier worden de spelregels daarvan uit de doeken gedaan. Oefeningen te over en ook bewijzen van een en ander komen aan de orde.
In hoofdstuk 17 komen we terecht bij het verband tussen constructies en algebra. Hierbij komt veel van de in de eerste vijftien hoofdstukken behandelde stof weer naar voren en dat maakt dit hoofdstuk tot zeker niet de makkelijkste van het boek.
In het laatste hoofdstuk van het boek passeren de klassieke constructieproblemen de revue. Eerst komen we de verdubbeling van de kubus tegen. Zijn we hier uit, krijgen we de kwadratuur van de cirkel op ons bord geschoven. Vervolgens kunnen we onze energie kwijt aan de driedeling van een hoek. Als laatste van het hoofdstuk is er nog ruimte voor regelmatige veelhoeken, waarbij we nog even een uitstapje maken naar de priemgetallen van Fermat.
Qua opbouw is het boek erg duidelijk gehouden. Ieder hoofdstuk is rijkelijk geïllustreerd met voorbeelden en opgaven. Definities zijn duidelijk aangegeven en goed onderbouwd en uitgelegd. Ieder hoofdstuk wordt afgesloten met verwerkingsopgaven. Hiervan staan achterin antwoorden met hier en daar een enkele hint om zelf tot de oplossing te komen.
Op de achterzijde van het boek wordt als ingangsniveau havo/vwo met wiskunde B en enige kennis van complexe getallen samen met basisbegrippen uit de algebra voldoende geacht. Mijns inziens is dat iets te mager. Je moet erg veel moed en doorzettingsvermogen hebben om dan het hele boek tot een goed einde te brengen. De doelgroep wordt omschreven als studenten aan hogeschool en universiteit en leraren wiskunde. Op zich een goede omschrijving, al moet dit boek zeker niet gezien worden als een boek dat je rustig voor het haardvuur op je vrije zondagmiddag ‘even’ doorleest.

Korrel

Mooi

[Kruimel]

Ik vind het allemaal prachtig. Heerlijk die eerste nummers van deze jaargang. Prachtig en mooi tegelijk. Kosten noch moeite gespaard. Ik trek eerst mijn nette pak aan voor ik het volgende nummer ga lezen. Die jongens van Arts en Auto zullen wel niet weten waar ze kijken moeten. En dan nog wel van wiskundeleraren.

Kijk bij de CEVO begrijpen ze dat over vormgeving nog niet helemaal. Ik wil nog wel een beetje meedenken in de richting van alle vakken even somber. Of van een examen mag je helemaal niet vrolijk worden. Daarmee naadloos aansluitend bij het totale onderwijsbeleid, maar misschien zou er toch een voorzichtige historica te vinden moeten zijn die de vormgevers bij de CEVO vertelt dat de Middeleeuwen al een tijdje voorbij zijn. Hier en daar een heldere foto of een bezinning op een lichtere tint grauw zou weliswaar de Arnhemse examencatacomben op hun grondvesten doen dreunen, maar voor de rest van de wereld een teken van leven zijn. Met de eerste echte examens van het onderwijs nieuwe stijl in het vooruitzicht zou de leuze bij de CEVO kunnen zijn: Een puntje minder, een kleurtje meer.

Boekbespreking

An Introduction to Gröbner Bases

[F.J.L. Martens]

Ralf Fröberg

John Wiley and Sons, 1997

177 pag.; prijs US$ 74,95; ISBN 0471974420

Een stelsel polynoomvergelijkingen, bijvoorbeeld
$x^2 + y^2 = 2$
$x^2 = y^4$
$y^6 = 1$
in de onbekenden x en y, kan worden opgelost met behulp van een methode waarbij Gröbnerbases gebruikt worden. Een Gröbnerbasis is een verzameling van polynomen, die aan zekere eigenschappen voldoet (een Gröbnerbasis heeft niets te maken met het begrip basis uit de lineaire algebra). Het probleem is wel dat gebruik van deze methode veel tijd kan kosten.

Het boekje valt in de volgende delen uiteen. Eerst wordt een stevige inleiding (ringen, lichamen, idealen en priemidealen) in de algebra gegeven. Daarna worden Gröbnerbases geïntroduceerd en de constructie van Gröbnerbases (met het algoritme van Buchberger) behandeld. Vervolgens worden het oplossen van stelsels polynoomvergelijkingen en de oplossingsverzamelingen van deze stelsels besproken. Natuurlijk komen ook toepassingen en speciale klassen van Gröbnerbases ter sprake. Tenslotte worden ideeën, die met Gröbnerbases (en de constructie ervan) samenhangen, in vogelvlucht besproken. Hierbij is veel zorg aan de literatuurverwijzingen besteed. Per hoofdstuk is een ruime collectie vraagstukken toegevoegd.

Voor een lezer die alleen maar een redelijk idee van het begrip Gröbnerbasis wil hebben, is dit boek ongeschikt. Afgezien van het feit dat de lezer het idee krijgt dat de ganse algebra nodig is om Gröbnerbases te introduceren, komt de auteur met een zodanige definitie van Gröbnerbases aanzetten, dat het nut van deze bases lang onduidelijk blijft.
Voor lezers die geduld hebben en die alles van Gröbnerbases willen weten, is het boek zeker geschikt. Het voorwoord en de aandacht voor de literatuur zijn heel goed. Jammer is weer dat praktische aspecten over de constructie van Gröbnerbases ontbreken.

Boekbespreking

Wiskundige Methoden Toegepast [Frits de Zwaan]

J. Grasman

J. Grasman

Epsilon Uitgaven, Utrecht, 1999

(herziene en verkorte uitgave)

229 pag.; prijs ƒ42,50; ISBN 90504100537

Een boek uit de praktijk van de Landbouw-universiteit Wageningen, waarbij hun Werkboeken A en B als uitgangspunt dienden. Niet toevallig sluiten die aan bij de vwo-stof wiskunde A en B, zodat aan de vraag naar proefwerksommen, SET-vraagstukken en Praktische Opdrachten kan worden voldaan.
De methode der kleinste kwadraten kan op iedere Grafische Rekenmachine worden toegepast, maar voor de leerling die een algemene benaderingswijze wil begrijpen, is hier zijn 'Fundgrube'.
Ook de nieuwsgierige die wil weten hoe een inverse matrix tot stand komt, zal aan zijn/haar trekken komen. Toepassingen op het gebied van de biologie, chemie, milieuwetenschappen en economie hoeven na lezing van dit boek geen probleem meer te zijn.
Behalve de genoemde onderwerpen komen nog iteratieprocessen, differentiaalvergelijkingen, partiële afgeleiden en integratie van ruimtelijke figuren aan de orde. De verzorging is zoals we van de Epsilonboeken mogen verwachten: eerste klas.
Achterin bevinden zich de antwoorden van de circa 120 opgaven.
Een boek dat in geen wiskunde-sectieruimte mag ontbreken!

Boekbespreking

Statistiek eenvoudig [H.J. Hofer]

J.S. Cramer en J. Hemelrijk

Serie Perspectief; kleine boekjes over grote onderwerpen

Uitgeverij Nieuwezijds, 1998

127 pag.; prijs ƒ19,90; ISBN 9057120119

In eerste instantie wekt de titel wrevel op, want statistiek is niet eenvoudig.
De bedoeling van de schrijvers is de lezer vertrouwd te maken met de gedachtengang van de moderne statistiek. Een leerboek is het niet.
Daarom staat terecht in het slotwoord: 'een verdere uitbouw en verfijning van de statistische theorie kan niet zonder het gebruik van gea-vanceerde wiskundige methoden'.
Er is op veel punten gebruik gemaakt van de Teleac-cursus 'Statistiek, te pas en te onpas' (J. Hemelrijk, 1972).
In een tiental hoofdstukken komen ter sprake: kansrekening, statistische verdelingen, schatten en toetsing van beweringen. Alles aan de hand van een grote rijkdom aan voorbeelden en aan-knopingspunten. De diverse begrippen worden goed uitgelegd en evenzo met verhalen geïllus-treerd. De voorbeelden zijn praktijk-gericht, waarbij steeds weer naar voren komt met welke beperkingen en moeilijkheden de statistici te maken hebben. Ook heel recente toepassingen komen ter sprake zoals een proefopzet voor de verstrekking van heroïne (1997).

Hierboven is al aangeduid dat de behandeling in hoofdzaak verbaal is. Ik zou me best kunnen voorstellen dat een beetje eerzuchtige (2e jaars wiskunde-)student het als een uitdaging kan zien om alle beweringen exact na te gaan.

In hun 'Verantwoording' geven de schrijvers aan de geïnteresseerde lezer een mooie ingang tot verdere statistische literatuur en bronnen.
Voor een eventuele schoolbibliotheek lijkt het boek me toch te moeilijk.

CEVO-maatregelen

De eerste havo-examens Tweede Fase zijn inmiddels achter de rug. Aan het eind van dit schooljaar zal bijna een kwart van de scholen voor het eerst eindexamen doen op het vwo. In dit artikel zetten we nog eens even op een rijtje welke veranderingen in de programma's zijn aangebracht en welke maatregelen de CEVO daar bovenop nog heeft getroffen. Het is natuurlijk van groot belang dat deze zaken bij alle collega's goed bekend zijn. Het zou in deze drukke tijden en volle programma's jammer zijn als er mogelijk onterecht veel aandacht wordt besteed aan iets dat minder of niet meer van belang is.

Permanente aanpassingen

Er zijn een aantal permanente aanpassingen gedaan. Dat wil zeggen aanpassingen die gelden voor alle cohorten. Dus ook voor 1998-starters. Deze betreffen allemaal het vwo.

De volgende onderwerpen zijn geschrapt uit het programma (soms alleen uit het CE; dat wordt aangegeven):
Vwo A1: rekenregels logaritmen, goniometrie, absolute waarde en Entier, de hellingfunctie en het toetsen van hypothesen
Vwo A12: rekenregels logaritmen, goniometrie, Absolute waarde en Entier, ruimtelijke objecten (uit het domein Meetkunde)
Vwo B1: Continue Dynamische Modellen (niet op CE, maar wel op SE)
Vwo B12: Continue Dynamische Modellen (niet op CE, maar wel op SE) en uit B2 stukken van de analytische meetkunde (eindtermen 140-144 en 151-153) en stukken van de voortgezette analyse (eindtermen 167-175)

CEVO-maatregelen

Naast de permanente aanpassingen kan de CEVO jaar na jaar onderdelen aanwijzen, die niet op het CE getoetst zullen worden. Deze dienen dan altijd wel in het SE aan de orde te komen.
Volgens sommige docenten biedt dat geen enkele verlich-ting. Andere docenten grijpen deze mogelijkheid aan om bijvoorbeeld onderwerpen eerder af te ronden, dan wel af te sluiten met een praktische opdracht. Ook wordt wel een meer eigen interpretatie gekozen om zo'n onderdeel te doen, bijvoorbeeld met wat zwaardere inzet van de grafische rekenmachine (GR) of van de computer. Dat soort vrijheden geeft deze maatregel in elk geval wel. Bij dit soort onderwerpen hoeven dus niet per se alle sommen uit het boek gedaan te worden.
CEVO-maatregelen moeten altijd aangekondigd worden voor 1 augustus van het jaar voorafgaand aan het examenjaar. Vaak is een eerdere bekendmaking natuurlijk veel prettiger, omdat daar dan ook in de voor-examenklas rekening mee gehouden kan worden.

Tot nu toe is bekend:

Vwo A1
Voor het examenjaar 2001: Grafen en Matrices

Vwo A12
Voor het examenjaar 2001: Grafen en Matrices

Vwo B1 en B12
Hiervoor zijn geen CEVO-maatregelen bekend. Natuurlijk is er wel de regeling dat Continue Dynamische Modellen niet op het CE, maar wel op het SE komt, maar dat was een permanente maatregel.

Havo A12
Voor het examenjaar 2001: De binomiale verdeling

Havo B1 en B12
Aan deze situatie wordt de gehele volgende paragraaf gewijd.

Tweede Fase

[Kees Hoogland]

Havo B1 en B12

Allereerst is het goed om te weten dat al in de oorspronkelijke examenprogramma's domeinen waren aangewezen die niet op het CE getoetst zullen worden. Dat is echter al weer zo lang geleden dat menig docent dit al bijna weer vergeten is.
Op het centraal examen B1 zullen geen vragen gesteld worden over het domein Ruimtemeetkunde 1. Dat wil zeggen dat het gehele examen in het teken zal staan van Analyse en Kansrekening/Statistiek.
Op het centraal examen B12 zullen geen vragen gesteld worden over het domein Kansrekening/Statistiek. Dat wil zeggen dat het gehele examen in het teken zal staan van Analyse en Ruimtemeetkunde.

Vorig jaar zijn de eerste examens geweest. De resultaten daarvan vielen op zijn zachtst gezegd niet mee. Bij B1 was een ophoging van 16 punten en bij B12 van 9 punten (zie ook Euclides 76-1).

Naar aanleiding hiervan zijn er twee CEVO-mededelingen geweest in september 2000 in Uitleg. Die worden hieronder integraal weergegeven.

Uitleg 21 van 20 september 2000
Havo wiskunde B1
Het examen wiskunde B1 van 2000, eerste tijdvak, bevatte enkele vragen die te moeilijk of aan de moeilijke kant waren, vanwege abstractie of formulering. Dit gold in het bijzonder voor vragen over het domein Kansrekening en statistiek.
In 2001 zullen de vragen voor wiskunde B1 gemiddeld genomen wat concreter en directer geformuleerd zijn. Met betrekking tot de vaardigheden bij het gebruik van de grafische rekenmachine zijn de examens van 2000 evenwel goede voorbeeldexamens.

Uitleg 22 van 27 september 2000
Havo wiskunde B1
Bij de centrale examens van 2002 worden in het vak wiskunde B1 geen vragen gesteld over het subdomein E4, periodieke functies (eindtermen 64-73).

Havo wiskunde B1,2
Bij de centrale examens van 2002 worden in het vak wiskunde B1,2 geen vragen gesteld over het subdomein E4, periodieke functies (eindtermen 64-73) en over het subdomein H2, periodieke functies 2 (eindtermen 99-103).

Uit het eerste bericht zijn de eerste twee zinnen duidelijk. De vragen zullen iets directer en makkelijker worden. De laatste zin is natuurlijk wat moeilijker te interpreteren.
In het nomenclatuurrapport van de NVvW en in de correctievoorschriften bij deze examens wordt er van uitgegaan dat bij een vraag als 'Bereken ...' de leerling de keuze heeft tussen een algebraïsche oplossing en een oplossing met de GR.
Wordt er een algebraïsche oplossing vereist dan moet dat expliciet gevraagd worden, bijvoorbeeld als volgt: 'Bereken de exacte waarde van ...'.
Ik heb de opgaven op de examens havo wiskunde B1 daarop doorgenomen en er worden uitsluitend vragen gesteld die de leerling de keuze laten tussen een algebraïsche oplossing en een oplossing met behulp van de GR.
De conclusie zou kunnen zijn dat bij havo wiskunde B1 de leerling voortaan altijd de keuze zal worden gelaten om alle opgaven met de GR op te lossen. Op zich niet onlogisch als je nadenkt over de vervolgopleidingen waar dit profiel op mikt.
Dit zou wel betekenen dat er nog eens heel goed naar de opgaven in de boeken gekeken moet worden.

Bij het tweede bericht is het van belang dat het hier niet gaat over het examen van 2001, maar pas over het examen van 2002. Het heeft dus gevolgen voor de leerlingen die nu in 4-havo zitten. De goniometrie zal wel getoetst moeten worden op het SE. Maar ook hier geldt dan weer dat de docent of wiskundesectie veel meer ruimte heeft om hieraan een eigen invulling te geven. Bijvoorbeeld het onderwerp beperken tot een grafisch numerieke benadering, of juist de computer inzetten met Derive, Maple, TI-interactive of Studyworks.

Tot slot

Dit schooljaar zullen we de eerste examens vwo te zien krijgen. Bij docenten ligt ook hier de grootste zorg bij het examen vwo wiskunde B1, omdat deze leerlingen relatief hieraan een veel geringere studielast besteed hebben dan voorheen aan het vwo wiskunde B examen.
Ook rond het examen vwo wiskunde A12 is zorg te bespeuren. Het landelijke gemiddelde zal niet meer omhoog getrokken worden door de leerlingen die wiskunde A en wiskunde B in het pakket hadden.
Het is spannend wat de toekomst hier brengen zal.

Tekstverwerking een aanvulling

[Wim Knoester-Doeve]

Naar aanleiding van het artikel 'Tekstverwerken en Wiskunde' in Euclides 75-5 (pag. 170-172) ontving ik een groot aantal reacties met vragen en suggesties. Het artikel vormde ook aanleiding tot verscheidene bijdragen in de digitale WiskundE-brief. Het is kennelijk een onderwerp dat velen bezig houdt.

Enkele punten blijken in het bijzonder te leven onder de lezers. Dit betreft enerzijds de aanschaf van MathType, de veelzijdiger applicatie dan Equation Editor en ook speciaal ontworpen voor wiskundig zetwerk, en anderzijds eventuele alternatieven.

Equation Editor en MathType

Wat de aanschaf betreft. Design Science Inc., de producent van Equation Editor en MathType, heeft sinds enige tijd een tweetal wederverkopers in Nederland. Dit zijn:

XCite Europe BV	Daedalus Onderwijsproducties
Maagdenburgstraat 10	Postbus 60
7421 ZB Deventer	9350 AB Leek
tel.: 0570-659977	tel.: 0594-516751
fax: 0570-659978	fax: 0594-517181
e-mail: *info@xcite.nl*	e-mail: *educad@xs4all.nl*

Op de websites van de bedrijven,
www.xcite.nl/rosco/
www.xs4all.nl/~educad
worden voor MathType prijzen vermeld van om en nabij *f* 270,- (excl. BTW) voor instellingen van onderwijs.

Voor meer informatie over het product zelf en voor een vergelijking tussen Equation Editor en MathType raadplege men de website van Design Science Inc: *www.mathtype.com*.

Een collectieve SURF/SLB onderwijslicentie voor MathType zou de prijs overigens kunnen reduceren tot een fractie van die 270 gulden. SURF en SLB ondernemen naar eigen zeggen op dit punt echter zelden actie op eigen initiatief; zij reageren vooral op 'gebleken voldoende vraag'. Daarom blijft de aanbeveling van het artikel om de behoefte aan een onderwijslicentie kenbaar te maken aan SURF en/of SLB, van kracht. Nog beter zou zijn wanneer bijvoorbeeld de NVvW samen met de lerarenopleidingen en APS vraag en aanbod zou inventariseren om op basis daarvan in overleg te treden met SURF/SLB.

en wiskunde:

Alternatieven

Een tweede punt dat in veel brieven en e-mailberichten terugkomt, is het suggereren van alternatieve producten met de capaciteit om wiskundige uitdrukkingen te zetten. De suggesties lopen uiteen van verouderde en niet meer leverbare producten zoals ChiWriter tot wiskundige pakketten uitgebreid met tekstverwerkingscapaciteiten, zoals bijvoorbeeld Mathcad van MathSoft Inc, of TI InterActive! van Texas Instruments Inc.
Die laatste producten zijn echter niet primair ontwikkeld als tekstverwerker, en hun mogelijkheden in dat opzicht

vrije nudging vereist character overlay

zijn dan ook zeer beperkt. Bovendien zijn zij gewoonlijk relatief duur. Voorts voldoen de formatteringsregels voor wiskundige uitdrukkingen binnen de tekstverwerkingscomponent van die producten gewoonlijk niet aan de meest gangbare stelsels van regels voor het zetten van wiskundige tekst. Zeker in het onderwijs is het van belang de leerling te laten wennen aan een consequente en gangbare notatie.

Ten slotte. Wil men het wiskundig zetwerk van dergelijke producten opnemen in een moderne tekstverwerker, dan doet zich nog een probleem voor. De wiskundige uitdrukkingen die door dergelijke applicaties worden gegenereerd zijn, net als die van Equation Editor en MathType overigens, gewoonlijk zelfstandige, aan onderscheiden applicaties gekoppelde objecten. Deze benadering leidt tot relatief hoge overheads, en daarmee tot nodeloos complexe documenten. Die complexiteit onttrekt zich weliswaar grotendeels aan de waarneming van de gebruiker, behalve dan door de grote omvang ervan. Zeker op de niet altijd moderne en vaak nog vrij trage en geheugenarme systemen die op scholen in gebruik zijn, is dit een handicap. Het insluiten van gekoppelde objecten is voorts een intrinsiek kwetsbare techniek. Daarmee worden namelijk de als hermetisch gesloten bedoelde grenzen van de sandboxes van de verschillende actieve virtuele machines die MS Windows genereert, overschreden. Dit leidt in de praktijk tot weinig robuuste en daardoor instabiele toepassingen. De frequentie van crashes bij documenten met ingesloten gekoppelde objecten is dan ook vele malen hoger dan in het geval van zelfstandige gesloten documenten.

Een oplossing

De structurele oplossing voor zetwerk van wiskundige tekst in standaard tekstverwerkers is echter eenvoudig en goedkoop. Zij bestaat in beginsel uit vier methodisch-technische componenten. De lettertypen van het gebruikelijke True-Type type (TTF) zijn vectorvoorstellingen. Hun specificatie komt tegemoet aan de volgende behoeften voor wiskundig zetwerk.

1. De mogelijkheid van ‘scaling’ van symbolen; dat wil zeggen het vrij kiezen van de grootte ten opzichte van de andere tekst.

2. De mogelijkheid van ‘nudging’ van symbolen. Dat is het mechanisme om symbolen met minieme horizontale en verticale stapjes in een document te verschuiven ten opzichte van de omgevende informatie. Bij voorkeur wordt dit begrip nudging ruim gedefinieerd, en wel met inbegrip van de mogelijkheid van roteren en van spiegelen. Voor de wiskunde zijn in een gewoon document scaling en nudging met tienden van millimeters een minimumvereiste.
Vrije nudging vereist bovendien het volgende.

3. ‘Character overlay’. Dit wil zeggen het vrij (zo nodig gedeeltelijk) over elkaar plaatsen van symbolen. Tekenoverslag is een bekende maar beperkte variant hiervan. Character overlay komt bovendien in bepaalde mate tegemoet aan de behoefte om zelf nieuwe symbolen te creëren.

$$G'(c) = \left(\frac{dF(f(x))}{dx}\right)_{x=c} = \left(\frac{dF(y)}{dy}\right)_{y=f(c)} \cdot \left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x=c}$$

$$\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{2}{2n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}$$

$$P(a < X \le b) = F(b) - F(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{v-\mu}{\sigma}\right)^2} dv$$

Voor een volledige oplossing van deze kwestie van wiskundige symbolen die op een gegeven systeem ontbreken, is ten slotte het volgende nodig.

4. ‘Character generation’; dit is het door de gebruiker vrij bouwen (en bewaren voor later hergebruik) van gewenste nieuwe symbolen.

De techniek voor deze vier functies bestaat. In grafische toepassingen zijn de eerste drie al talloze jaren gemeen gebruik. Dit is echter slechts in nodeloos beperkte mate het geval in de nog altijd lineair georiënteerde tekstverwerkers van vandaag de dag. Voorts, voor zover die tekstverwerkers deze functionaliteit ondersteunen, is dat bepaald niet op een wijze die snel routinematig wiskundig zetwerk mogelijk maakt. Het genereren van eigen tekens vereist bovendien nog altijd zelfstandige applicatiesoftware. Die is weliswaar vrij verkrijgbaar. Maar slechts weinig gebruikers zullen voor het componeren van ontbrekende maar benodigde wiskundige symbolen de omslachtige weg weten te gebruiken die daartoe nu nog moet worden bewandeld.

De oplossing voor de bijzondere behoeften van wiskundig zetwerk moet gezocht worden in integratie van deze vier technieken in de gebruikelijke applicaties voor tekstverwerking, en niet in de ontwikkeling van zelfstandige applicaties voor wiskundig zetwerk.
De vijf grote producenten van ‘office software’ roepen alle om het hardst dat zij hun producten ontwikkelen op basis van goed luisteren naar de markt. Als dit waar is, dan roepen wiskundigen, natuurkundigen, scheikundigen, ingenieurs, economen en anderen met specifieke eisen qua zetwerk wereldwijd kennelijk niet hard genoeg terug.
Maar ook bijvoorbeeld een student informatica is al langs eenvoudige weg in staat om deze geïntegreerde functionaliteit met een gebruiksvriendelijke en efficiënte interface binnen de bekende standaardtekstverwerkers te ontwikkelen. Hier ligt een uitdagende afstudeeropdracht met wereldwijd marktpotentieel.

Dit lijkt bij uitstek een geschikte aanleiding voor de NVvW om, samen met de lerarenopleidingen, een prijsvraag uit te schrijven.

Wintersymposium van het Wiskundig Genootschap

WISKUNDIG GENOOTSCHAP
Onder de zinspreuk
"Een onvermoeide arbeid komt alles te boven"
te Amsterdam, opgericht in 1778

Al vele jaren organiseert het Wiskundig Genootschap op de eerste zaterdag in het kalenderjaar haar Wintersymposium.
Dit symposium is in eerste instantie bedoeld voor docenten uit het voortgezet onderwijs, maar natuurlijk is iedere belangstellende van harte welkom.
De doelstelling van het Wintersymposium is het contact tussen leraren enerzijds en wiskundigen uit de academische wereld en het bedrijfsleven anderzijds te onderhouden en te verstevigen. In een drietal voordrachten belichten ervaren sprekers facetten van een gekozen thema.

Het symposium zal op zaterdag 6 januari 2001 worden gehouden in het Johan van Oldenbarnevelt Gymnasium, Thorbeckeplein 1, Amersfoort en heeft als thema
Wiskunde en recreatie: wat doen mensen zoal in hun vrije tijd om zich te ontspannen en welke wiskunde is daarin te ontdekken.

De eerste voordracht toont aan dat er als variaties van de bekende vijf regelmatige veelvlakken verrassende objecten kunnen ontstaan: het voetbalveelvlak, beweegbare veelvlakken, ruimtevullers en Roelofs-veelvlakken. De spreker laat zien dat op veel plaatsen veelvlakken zijn te herkennen. Ook wordt aandacht besteed aan het daadwerkelijk realiseren van modellen van veelvlakken.
In de tweede voordracht staan diverse kunst-objecten centraal. De toehoorder leert hoe naar deze objecten te kijken opdat de achterliggende wiskunde ontdekt kan worden.
In de afsluitende lezing komen spelen aan de orde waarin naast toeval ook behendigheid een rol speelt. Aan de hand van (computersimulaties van) spelen als Roulette, Golden Ten en Draw Poker laat de spreker zien wat behendig gokken inhoudt. Kansrekening en statistiek zullen hierbij hun dienst bewijzen.

	Programma:
09.30 - 10.00	Ontvangst met koffie en thee
10.00 - 11.00	Veelvlakken - F. Göbel (UT)
11.00 - 11.15	Pauze met koffie en thee
11.15 - 12.15	Wiskunde in de Kunst - T. Verhoeff (TUE)
12.15 - 13.30	Pauze waarin men deel kan nemen aan een gezamenlijke lunch
13.30 - 14.30	Behendig gokken in en rond het casino - B. van der Genugten (KUB)

De deelname is gratis. Wie wil deelnemen aan de gezamenlijke lunch, wordt verzocht vóór 25 december 2000 *f* 17,50 over te maken op gironummer 3762917 t.n.v. H. Bakker, Zuiderbuuren 32, 9363 HK Marum.
Wie in aanmerking wil komen voor een certificaat dient bij de betaling te vermelden: Certificaat.
Voor verdere inlichtingen kunt u terecht op de website van het Wiskundig Genootschap *(http://www.wiskgenoot.nl)* of u kunt bellen met 050 3633935 (overdag) of 0594 641636 ('s avonds) of e-mailen naar *h.bakker@cs.rug.nl*.

Millennium

[Jan Zuidbroek]

De millenniumvergissing is het gevolg van de aanname van het jaar 0. Als ik zeg 'het jaar 2000 is het laatste jaar van de twintigste eeuw' dan antwoordt men vaak 'nee, het jaar 2000 is het eerste jaar van de eenentwintigste eeuw, want het jaar 0 was het eerste jaar van de eerste eeuw'. Met de logica van deze reactie is het dik in orde, alleen hoe zit het eigenlijk precies met dat jaar 0? Om deze vraag te kunnen beantwoorden moeten we nagaan hoe onze jaartelling in elkaar zit.

Het jaar 0

Onze jaartelling is gebaseerd op de in opdracht van paus Johannes I door Dionysius Exiguus (D.E.) opgezette tijdschaal die in het jaar 526 met terugwerkende kracht werd ingevoerd. Deze tijdschaal werd geacht te beginnen met de geboortedatum van Jezus en ziet er uit als in figuur 1.

Logisch: elke vierjarige viert zijn vierde verjaardag niet aan het begin maar aan het eind van zijn vierde levensjaar. Dat we in deze tijdschaal het getal 0 en de negatieve gehele getallen niet aantreffen, vindt zijn oorzaak in het feit dat deze getallen in het Europa van de zesde eeuw nog niet bekend waren.
Vrij spoedig na de invoering van de tijdschaal van D.E. zijn historici (onder wie naar ik vermoed D.E. zelf) begonnen met het dateren van belangrijke historische feiten. Om ook gebeurtenissen die zich *voor* het begin van onze jaartelling hebben voorgedaan te kunnen dateren kwam men ertoe om de tijdschaal van D.E. uit te breiden tot een *volledige* tijdschaal die er uiteindelijk (toen men eenmaal enigszins vertrouwd was geraakt met het getal 0 en de negatieve gehele getallen) kwam uit te zien als in figuur 2.

Het is *deze* jaartelling die thans wereldwijd wordt gebruikt (met jaar –3 wordt natuurlijk het jaar 3 *voor* Chr. bedoeld). Essentieel is dat er wel een *tijdstip* 0 is, maar geen *jaar* 0 (zoals er ook geen nulde eeuw is).
Zoals het tijdstip 0 de overgang is van de eerste eeuw *voor* Chr. naar de eerste eeuw *na* Chr., zo is dat tijdstip natuurlijk ook de overgang van het jaar –1 naar het jaar 1.
Bovendien constateren we dat onze jaartelling *symmetrisch* is ten opzichte van tijdstip 0. Even vanzelfsprekend vinden we het dat elk genummerd jaar tot precies *een* genummerde eeuw behoort (bijv. het jaar 100 behoort tot de eerste eeuw maar niet tot de tweede).
Hieruit volgt dat er eenvoudig geen jaar 0 *kan* zijn, ook al zouden we dat nog zo graag willen. Immers zo een jaar 0 zou vanzelfsprekend tot de eerste eeuw *na* Chr. moeten behoren, maar dan ook (vanwege de symmetrie) tot de eerste eeuw *voor* Chr.. De aanname van een jaar 0 leidt hoe dan ook tot absurditeiten. We moeten daarom aanvaarden dat er geen jaar 0 is (hoewel er natuurlijk niets op tegen is om uitdrukkingen te gebruiken als 'een wijntje van het jaar 0').

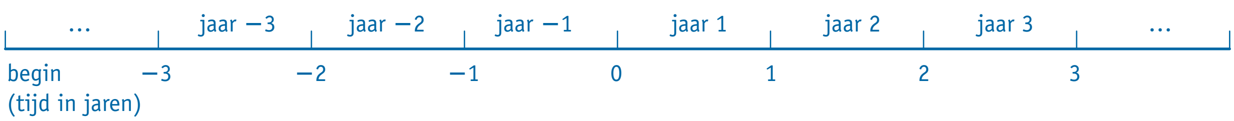
vergissing

De millenniumkwestie

Nu we ons er rekenschap van hebben gegeven, dat er met onze jaartelling niets mis is (het enige, maar onvermijdelijke ‘schoonheidsfoutje’ is het ontbreken van een jaar 0) kunnen we snel afrekenen met de ‘millenniumkwestie’: het eerste millennium eindigde met het jaar 1000, en was dus pas op 1-1-1001 voorbij; hieruit volgt dat het tweede millennium (en daarmee natuurlijk ook de twintigste eeuw) pas op 1-1-2001 voorbij zal zijn.
Millenniumvergissing 1 werd gemaakt door middeleeuwers die dachten dat op 1-1-1000 de wereld zou vergaan. Deze mensen realiseerden zich namelijk niet, dat op deze datum pas 999 jaren van het eerste millennium waren verstreken.
Millenniumvergissing 2 werd gemaakt door moderne mensen die zich op het verkeerde been hebben laten zetten door media, commercie, autoriteiten en helaas ook historici die beter hadden moeten weten, en zich hebben laten aanpraten, dat niet 1-1-2001 maar ‘de magische datum 1-1-2000’ met zijn millenniumprobleem en zijn millenniumgekte de eerste dag van het nieuwe millennium moest zijn.
‘Alles goed en wel’ roept daar nog iemand, ‘maar mijn kilometerteller dan, die laat toch mooi na precies 1000 kilometer drie nullen zien!’. Dat klopt, maar het door hem geconstateerde verschil tussen kilometerteller en jaartelling komt dan ook doordat zijn kilometerteller startte bij 000 maar onze jaartelling op 1-1-1.

1 en 2





Het Wereldwiskunde Fonds

[Johan Derks, penningmeester]

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

In het aflopende schooljaar zijn door het Wereldwiskunde Fonds (WwF) met uw hulp twee projecten gesubsidieerd: een school in Ghana, met *f* 6000,- voor schoolboeken en visueel materiaal[1], en een school voor Zuid-Soedanezen in Khartoem, met *f* 8000,- aan leermiddelen. Gemiddeld komt er per jaar ongeveer f 8500,- aan bijdragen van leden van de NVvW binnen. Het WwF kon echter dit schooljaar eenmalig *f* 14.000,- doneren, omdat er de vorige jaren steeds iets minder was besteed dan *f* 8500,-. Het 'stuwmeer' aan financiële middelen is nu weer teruggebracht tot *f* 12.000,-. In juni namen we het besluit om hiermee een school in Kenya te gaan steunen. Deze school heeft al een langjarige relatie met het Sint-Montfort College in Rotterdam, zodat onze hulp binnen een kader valt.

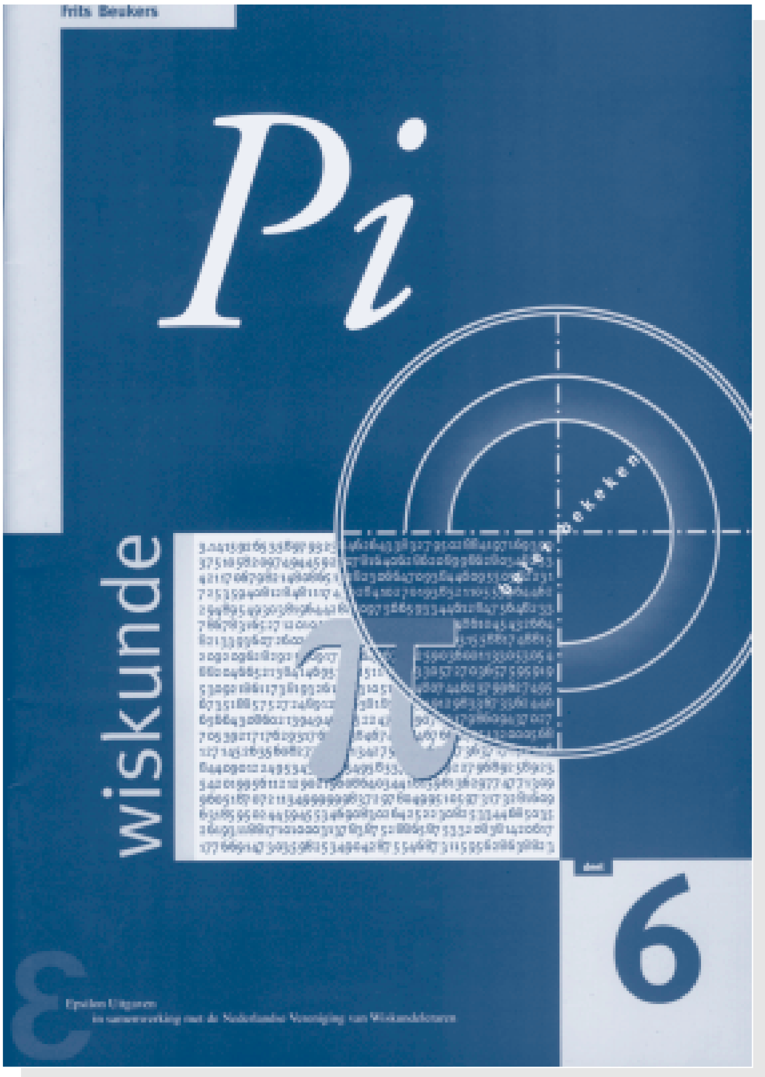
Het is werkelijk fantastisch, dat zoveel leden trouw hun bijdrage van *f* 5,- blijven storten. Hartelijk dank!

[1] Zie het artikel van Petra Bos, Het Wereldwiskunde Fonds en wiskunde in Ghana, in Euclides 76-2, p. 074.

Bedankt!

Wereldwiskunde Fonds

Zebra 6



We hebben allemaal wel eens met het getal π kennis gemaakt. Het is een getal dat je nodig hebt bij het berekenen van omtrekken, oppervlakten en inhouden van cirkels en bollen, maar π heeft voor sommigen ook een bijna geheimzinnige aantrekkingskracht.
In dit deel van de Zebra-reeks worden antwoorden gegeven op vele π-raadsels.
Hoe kan je een formule voor de inhoud van een bol afleiden? Archimedes had daar een heel slim idee voor. Hoe kan je π berekenen? Hiervoor zijn ingenieuze methoden bedacht, o.a. door beroemde wiskundigen als Newton, Gauss en Ramanujan. Is π een breuk? Nee, maar het heeft meer dan 2000 jaar gekost om dat te bewijzen.
Tenslotte vind je in dit zeer leesbare boekje nog wat π-curiosa, zoals een π-gedicht, het wereldrecord π en de wetgeving(!) omtrent π.

ISBN 90 5041 062 6
Prijs voor leden van de NVvW: *ƒ* 16,50 (inclusief verzendkosten) - Bestellingen via girorekening 5660167 t.n.v. Epsilon Uitgaven, Utrecht.
Prijs voor leden van de NVvW op bijeenkomsten: *ƒ* 12,50.
Prijs voor niet-leden: *ƒ* 16,75 (in de betere boekhandel).
Voor abonnementen zie Service pagina 144 van dit nummer van Euclides.

Epsilon Uitgaven
in samenwerking met de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Op weg naar het einde van de standaardnormale

[Willem Hoekstra en Douwe Kok]

Om maar meteen met de deur in huis te vallen: wij denken dat u in de bovenbouw van havo en vwo flinke stukken van het rekenwerk in de hoofdstukken rond de normale en de standaardnormale verdeling kunt overslaan, zonder dat de kansen van uw leerlingen op een goed examenresultaat daardoor worden verkleind.

Zulke voorstellen zijn natuurlijk altijd welkom in een situatie die getypeerd wordt door werkdruk en overbelasting. Aan de andere kant zal menig serieus docent met enig wantrouwen reageren. Zou het wel waar zijn? Er zijn nog te weinig examens geweest om van een examentraditie te spreken. En de schoolboeken bevatten allemaal hoofdstukken of paragrafen met titels als 'De standaardnormale verdeling'.
Begin 1998 wees Paul Drijvers [1] er al op dat de mogelijkheden voor het gebruik van de grafische rekenmachines (GR) bij statistiek over het algemeen minder aandacht krijgen dan de mogelijkheden voor het gebruik bij de analyse. Op dat moment waren de schoolboeken voor klas 4 al verschenen. De volgende generatie schoolboeken voor de Tweede Fase zal ongetwijfeld op dit punt verbeterd worden.
Maar het is toch jammer om tot 2003 te wachten met het volledig benutten van de GR bij het aanpakken van problemen waarbij de normale verdeling een rol speelt. Te meer omdat bijna alle leerlingen in de Tweede Fase met dit onderwerp te maken krijgen.

Probleemschets

In de huidige generatie schoolboeken wordt het onderwerp Normale Verdeling meestal als volgt opgebouwd. Eerst vindt een introductie van de normale verdeling plaats en worden de kenmerken en de vuistregels van deze verdeling gegeven. Daarna wordt de leerling geconfronteerd met de noodzaak van een herleiding tot de standaardnormale verdeling.
Vervolgens wordt het gebruik van de normale tabel behandeld. In de opgaven komen problemen aan de orde als: zoek een onbekende grenswaarde, een onbekend gemiddelde of een onbekende standaarddeviatie. De oplossing kan steeds gevonden worden met behulp van de tabel als tenminste de formule

$$z = \frac{(x - m)}{s}$$

ten volle begrepen wordt. Dit is zeker voor leerlingen die op het havo wiskunde A volgen geen eenvoudige opgave.

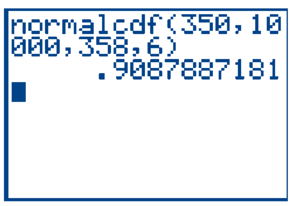
Hoe kan het met de GR?

In het afgelopen schooljaar heeft een van ons in een klas havo-4 wiskunde A1/A12 met de leerlingen aan dit soort opgaven gewerkt. Er is een aanpak gekozen waar, door handig gebruik te maken van de TI-83, de standaardisatie, de standaardnormale verdeling en het

1


0-4 Een fabrikant produceert pakjes hagelslag.
Het gewicht van de pakjes is normaal verdeeld met een gemiddelde gewicht van 358 gram en een standaarddeviatie van 6 gram.
a Welk percentage van de pakjes heeft een gewicht van minstens 350 gram?
b Hoeveel procent van de pakjes heeft een gewicht tussen de 358 gram en de 370 gram?
c Welk gewicht hoort bij de lichtste 10% van de pakjes?
d De fabrikant wil het gemiddelde zo veranderen dat 92 % van de pakjes minstens 350 gram weegt.
Hoe groot moet het gemiddelde gewicht dan worden?
e De fabrikant is niet echt tevreden en gaat een vulmachine kopen met een kleinere standaarddeviatie.
Hij stelt als eis dat bij een gemiddelde van 358 gram 92 % van de pakjes minstens 350 gram moet wegen.
Hoe groot zal de standaarddeviatie moeten zijn?

2



verdeling

gebruik van de tabellen achterwege kon blijven. Deze methode was al eerder geschetst door Paul Drijvers in de Wiskunde-brief no. 21 van november 1999.
We zullen deze aanpak illustreren aan de hand van een opgave uit het Moderne Wiskunde, de methode die in deze klas gebruikt wordt. (zie figuur 1)

In eerdere paragrafen hebben de leerlingen gezien dat ze een percentage bij een normaal verdeelde kansvariabele kunnen uitrekenen met de optie NORMALCDF (LG, RG, M, S), waarin achtereenvolgens de linkergrens, de rechtergrens, het gemiddelde en de standaarddeviatie als waarden moeten worden meegegeven.
Voor de beeldvorming en de controleerbaarheid moeten ze beginnen met het tekenen van een klokkromme met daarin aangegeven de waarde van het gemiddelde, de plaats van de grenswaarde, de standaarddeviatie en de juiste arcering. Daarna kan de rekenmachine worden ingezet (zie figuur 2).
Bij opgave G-4a komt dan figuur 3 in het schrift.

Opgave G4-b gaat op precies dezelfde manier.
Deze optie van de GR komt in de meeste schoolboeken wel aan de orde.

Terugrekenen

Bij opgave G4-c beginnen de moeilijkheden. Daar moet worden terug gerekend naar de rechtergrens. Ook hier laten wij eerst weer een plaatje tekenen voor de begripsvorming (zie figuur 4).

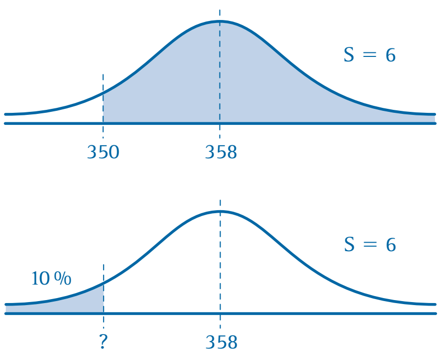
Maar voor de inzet van de GR wordt nu een heel nieuwe benadering gekozen.
In het functiescherm voeren de leerlingen de boven genoemde optie NORMALCDF als functie in. Dat gaat via de Y = toets en daarna met 2nd DISTR.
Dus in dit geval: Y1 = NORMALCDF(-10000, X, 358, 6).
Zie figuur 5.
Het meest wezenlijke hierbij is om vast te stellen wat in deze situatie de variabele is en waar dus de *X* moet komen te staan. Met een strategie van inklemmen in een tabel komen de leerlingen tot de oplossing. Hiervoor moeten ze natuurlijk eerst wel bedenken naar welke waarde ze op zoek zijn, dus waar ze de tabel moeten laten beginnen en met welke stapjes ze de tabel willen laten doorlopen. Aan het eind dienen ze de waarden waartussen de oplossing ingeklemd zit op te schrijven en moeten ze beredeneren naar welke van deze twee waarden ze moeten afronden (zie figuur 6 en 7).

Opgave d en e zijn nu niet wezenlijk anders, alleen is nu het gemiddelde respectievelijk de standaarddeviatie de onbekende.
Op de TI-83 is het natuurlijk ook mogelijk om direct terug te rekenen naar de rechtergrens van een cumulatieve normale tabel met de optie INVNORM Deze optie is bewust niet gebruikt, omdat ze niet toepasbaar is bij het terugrekenen naar gemiddelden of standaarddeviaties. We wilden liever het aantal methodes zo beperkt mogelijk houden.

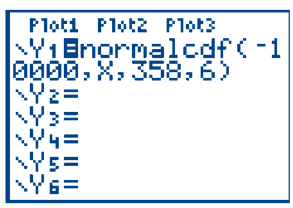
Hoe werkt deze aanpak voor A-leerlingen?

Dit is het eerste jaar dat de havo-leerlingen op deze manier hebben leren werken met de normale verdeling. Het is misschien nog wat te vroeg om in algemene termen uitspraken doen over de effectiviteit. De eerste correctievoorschriften geven in ieder geval wel aan dat de methode toegestaan is.
We hebben gemerkt dat het vinden van oplossingen door inklemmen in een tabel een oplossingsstrategie is waar ook de havo A1-leerlingen goed mee uit de voeten

3 en 4



5



kunnen. Daarom is bewust voor deze strategie gekozen boven bijvoorbeeld het grafisch bepalen van een oplossing, omdat hierbij vaak problemen ontstaan bij het goed in beeld brengen van de grafiek. De uitvoering van het 'rekenwerk' leverde dan ook weinig problemen op. De leerlingen hadden de meeste moeite met het omzetten van de informatie uit de tekst naar het juiste plaatje van het klokmodel. Ook het terugkoppelen naar de oorspronkelijke vraagstelling, vooral wanneer er afgerond moest worden, leverde de nodige hersenbrekens op. Dit zijn echter de bekende, algemene problemen rond modelleren, waarvan het alleen maar goed is dat de leerlingen er tegenaan lopen. Zeker als je ineens tijd hebt om er aandacht aan te besteden.

Is het verdwijnen van de standaardnormale verdeling een verlies?

Dat lijkt ons niet. De standaardnormale verdeling was nodig in een tijd dat we niet de beschikking hadden over een 'onbeperkt tabellenboek' zoals die geproduceerd wordt door de formule
Y = NORMALCDF(LG, RG, M, S). Wellicht is het voor een aantal profielen wel zinvol om aandacht te schenken aan de *z*-waarde als gestandaardiseerde maat van excentriciteit. Twee trekkingen uit verschillende steekproeven, waarbij de ene trekking een hogere *z*-waarde heeft als de andere, geeft bijvoorbeeld waardevolle informatie over het verschil in waarschijnlijkheid van beide trekkingen.
Er is echter ook nog een onverwacht voordeel aan de hier geschetste aanpak. Leerlingen worden steeds opnieuw gedwongen zich af te vragen wat in de formule Y = NORMALCDF(LG, RG, M, S) nu weer de variabele is en welke waarden bekend zijn. Zo wordt deze formule op zichzelf tevens een fraaie context voor het werken met formules met meerdere varabelen. En dat is immers een apart subdomein.

Afbakening van de stof voor verschillende groepen leerlingen

Een belangrijke vraag is of op deze manier het examenprogramma wordt gevolgd. We citeren nog maar eens de relevante eindterm uit het examenprogramma.

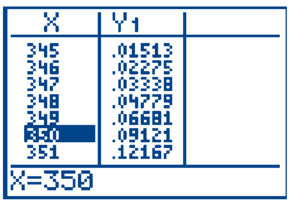
Eindterm 47:
De kandidaat kan een normale verdeling met (geschat) gemiddelde *m* en (geschatte) standaardafwijking *s* vertalen naar de standaardnormale verdeling en voor berekeningen standaardnormale tabellen (of een overeenkomstige functie op de rekenmachine) hanteren.

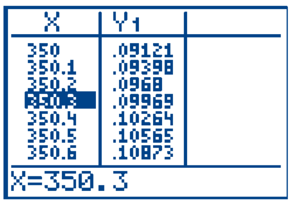
Hoe interpreteren we deze eindterm? Wat voor vertaling verwachten we van havo-A1 en havo-A12-leerlingen? Wij hebben inmiddels besloten dat het voor havo A1-leerlingen genoeg is als ze alleen bij een gegeven gemiddelde en gegeven standaardafwijking een bijbehorende percentage kunnen bepalen. Dat wil zeggen dat het voor deze leerlingen volstaat te werken met NORMALCDF(LG, RG, M, S).
Alle andere groepen leerlingen moeten zowel heen als terug kunnen rekenen en redeneren en ook een onbekend gemiddelde of een onbekende standaarddeviatie kunnen opsporen. Naar ons idee is de hier geschetste aanpak een goede manier om dat soort opgaven op te lossen. En deze aanpak kan zomaar een flinke besparing opleveren in het aantal lessen dat hieraan normaal gesproken besteed moet worden.

Tot slot

De hierboven beschreven methode maakt gebruik van een aantal specifieke mogelijkheden van de TI-83. Niet alle merken grafische rekenmachines beschikken over deze specifieke toepassing. Hierdoor lijkt het gevaar te ontstaan dat leerlingen met andere machines in het nadeel worden gesteld. Dit hoeft volgens ons niet het geval te zijn. De grafische rekenmachines zijn allemaal programmeerbaar en het zal niet lang duren voordat er voor elk type machine een programmaatje beschikbaar is die op vergelijkbare wijze bovenstaande bewerkingen probleemloos kan uitvoeren. Dit soort hulpprogramma's zijn vaak via internet binnen te halen en kunnen vervolgens eenvoudig tussen de machines onderling uitgewisseld worden. Aangezien de machine bij het centraal examen niet van tevoren ge-reset hoeft te worden, staat niets de leerlingen in de weg deze programma's hier ook te gebruiken.

Noot:
[1] Paul Drijvers (1998); Statistiek met de grafische rekenmachine in Euclides 73-4, januari 1998.





Er was eens een getal

[Ger Limpens]

J.A. Paulos

J.A. Paulos

'Wiskunde en de allerdaagse werkelijkheid'

vertaald door R. Rutten-Vonk

Bert Bakker, Amsterdam

208 pag.; prijs fl. 29,90; ISBN 9035120590

Natuurlijk weet u wat equidistante letterreeksen zijn. Misschien weet u niet dat u het weet maar als u verteld wordt dat een equidistante letterreeks (ELR voor intimi) een reeks letters is waarin iedere letter van de vorige wordt gescheiden door een vast interval van letters, dan roept u ongetwijfeld dat u daarbij moet denken aan de rage die enkele jaren geleden ontstond doordat er publicaties werden gewijd aan het merkwaardige verschijnsel dat de Thora (de eerste vijf boeken van de bijbel) veel van deze ELR's blijken te bevatten die volgens de auteurs van deze publicaties zouden wijzen op significante relaties tussen mensen, gebeurtenissen en data. En ongetwijfeld heeft u dergelijke publicaties altijd als onzinnig bestempeld, maar wellicht heeft u zich nooit precies afgevraagd wat nu de argumenten zijn om geen betekenis aan het voorkomen van dergelijke ELR's te hechten. In dat geval komt het laatste boek van John Allen Paulos, *Er was eens een getal*, u goed van pas. Paulos legt op vermakelijke wijze uit dat er eigenlijk weinig bijzonders aan de hand is als je in een tekst een of meer ELR's aantreft. Dat doet hij door middel van een voorbeeld: volgens Paulos is er in de Amerikaanse Grondwet een voorspelling van het Lewinsky-schandaal aangetroffen doordat in het historische document zowel een ELR van BILL als een ELR van MONICA is aangetroffen. Tot overmaat van ramp hebben beide ELR's ook nog eens hetzelfde regelmatige letterinval. Dat u en ik daar nog niet van gehoord hebben, is gelegen in het feit dat Clintons advocaten dit fenomeen hebben weten achter te houden, maar dit terzijde.
Behalve ELR's komen er in Paulos' boek nog veel meer zaken aan de orde. Zoals te doen gebruikelijk, slaagt Paulos er ook nu weer in de afstand tussen wiskunde en de alledaagse werkelijkheid klein te maken dan wel te houden. Net zoals hem dat eerder lukte in *Ongecijferdheid*, *De gecijferde mens*, *Ik denk dus ik lach* en *Een wiskundige leest de krant*. In zijn nieuwste boek besteedt hij voornamelijk aandacht aan het verband tussen verbeelding en abstractie, tussen verhalen en statistiek, tussen fantasie en feiten. Hierbij passeren onder heel veel andere het manifest van de Una-bomber, moeder Theresa, O.J. Simpson en diens rechtzaak, religie, Murphy's Law en Madame Bovary de revue. Uiteindelijk besluit Paulos met een pleidooi voor het in stand houden van zowel de fantasie als de feiten, zowel de verhalen als de statistiek, maar voordat het zover is, heeft hij de lezer onderhouden met hoofdstukken als 'Tussen subjectieve gezichts-punten en onpersoonlijke waarschijnlijkheid' en 'Tussen informele spreektaal en logica'. Het is moeilijk, zo niet onmogelijk, samen te vatten wat Paulos nu precies in dergelijke hoofdstukken wil beweren anders dan het schetsen van de beide uitersten die in de hoofdstuktitels genoemd worden en het aangeven van de diverse bruggen die tussen die uitersten geslagen kunnen worden. Maar dat is ook, althans in mijn ogen, niet de waarde van het boek. Die waarde is, voor mijn gevoel, gelegen in het feit dat Paulos over een kennelijk nooit opdrogende bron van prachtige voorbeelden beschikt waar een wiskundige, en zeker een docent, heel vaak bij zal denken: “Daar kan ik wat mee, hetzij als anekdote, hetzij als bron van een opgave, hetzij als een stukje leerstofillustratie”.
De eerlijkheid gebiedt me echter wel te zeggen dat er in dit boek doublures optreden met passages in eerdere boeken van Paulos. Soms geeft Paulos daarbij aan dat hij zichzelf citeert, bijvoorbeeld daar waar hij enkele geestige passages van fictieve discussies tussen Bertrand Russell en Groucho Marx uit *Ik denk dus ik lach* overneemt. Maar op andere plaatsen pleegt hij op een wat verhullender wijze autoplagiaat. De soefi-anekdote van de molla en de Romeinse geleerde bijvoorbeeld treffen we, weliswaar niet woordelijk gelijk, eveneens aan in *Ik denk dus ik lach*. En zo zijn er meer punten van herkenning voor een lezer die vroeger werk van Paulos gelezen heeft. Maar voor de lezer zonder specifieke Paulos-voorkennis mag dit natuurlijk geen belemmering zijn. Paulos slaagt er ook bij dergelijke herhalingsoefeningen in zijn verhalen als treffende illustraties binnen zijn betoog op te nemen. Ik heb mij, kortom, kostelijk vermaakt tijdens het lezen ondanks voornoemde onverwachte herkenningspunten. Het enige dat mij daadwerkelijk soms stoorde, was de in mijn ogen foeilelijke illustratie op de voorkant van het boek. Maar zolang het boek open voor mij lag, had ik daar uiteraard geen last van. En vermoedelijk geldt voor een dergelijke afbeelding in het bijzonder het adagium van smaak en twist.

Impressies uit Japan

[Pauline Vos]

In augustus 2000 werd in Tokyo de ICME-9 (International Conference on Mathematics Education) gehouden. Dit is een vierjaarlijks congres waar wereldwijd de balans wordt opgemaakt over de stand van zaken in het wiskundeonderwijs.

Inleiding

Ik werk aan de Universiteit Twente, waar ik onderzoek doe naar het wiskundeonderwijs. Eén van mijn projecten is het Nederlandse aandeel in TIMSS (Third International Mathematics and Science Study), een vergelij-kende studie in de exacte vakken. Hierbij werden in 40 verschillende landen dezelfde toets en dezelfde enquêtes afgenomen. Uit TIMSS blijkt dat het onderwijs in de exacte vakken in Nederland op een hoog pijl staat, relatief ten opzichte van veel andere landen. In de Verenigde Staten bijvoorbeeld leren de leerlingen veel meer stof in dezelfde tijd, maar het gaat er veel oppervlakkiger, en de leerlingen vergeten alles daardoor ook weer sneller.
Ik was naar de conferentie gekomen om informatie uit te wisselen over het wiskundeonderwijs. En hoewel er in Nederland nog veel te verbeteren valt, is het toch aardig om te merken dat Nederland voorop loopt. Veel landen zijn bezig met veranderingen waarmee wij al 10 tot 20 jaar ervaring hebben en veel conferentiegangers willen graag horen en zien hoe 'wij' het doen.

Japan

De conferentie heeft een overvol programma en na een aantal dagen van ademloos luisteren en discussiëren kan ik het allemaal niet meer zo goed verwerken. Ik spijbel om wat van de Japanse hoofdstad te gaan zien. Aldus zit ik in de drukke metro naast een Japanner van middelbare leeftijd met een beduimeld puzzelboekje. Hij zucht, kauwt op zijn potlood en is zeer geconcentreerd. Ik kijk nieuwsgierig over zijn schouder en zie zwarte en witte blokjes. Eerst denk ik nog argeloos dat hij een kruiswoordpuzzel maakt. Maar dan kijk ik beter en zie magische vierkanten van afmeting 9 x 9. Wiskunde als recreatieve hersenkrakers in de alledaagse metro!

Naar aanleiding van deze toevallige observatie bedenk ik, dat een alfabet van meer dan 3000 verschillende karakters helemaal geen kruiswoordpuzzels toelaat. Je kunt er niet gezellig *scrabble* of *lingo* mee spelen. De houding van Japanners ten opzichte van 'taal' verschilt daardoor misschien wel wezenlijk van de onze.
Navraag leert dat het schoolvak 'taal' in Japan op de lagere school ook niet bepaald gezellig is: je moet minstens 800 karakters kennen om niet als analfabeet door het leven te gaan. En de lesmethode voor 'taal' blijkt uiterst autoritair: alle tekens worden vanaf de allereerste les in schoonschrift gekalligrafeerd. De volgorde, het aantal streepjes en hun richting worden streng benadrukt, en er klassikaal ingestampt.
De houding ten opzichte van 'wiskunde' is ook anders dan bij ons. In het dagelijks leven vallen me veel reken- en wiskundeactiviteiten op. Zoals die man in de metro. Ook zijn veel Japanners verschrikkelijk handig in vouwconstructies (origami). Gedachteloos vouwt tafelgenote Mayumi tijdens het diner een afvalsnipper tot een klein zeshoekig onderzettertje voor de eetstokjes. Als we haar vragen hoe ze die vouw van 60° maakte, schrikt ze ('I really don't like mathematics!'), en realiseert ze zich pas dat er iets wiskundigs aan de hand is.



1



2

Ook het opdienen van de maaltijd in het Japanse eethuis levert een wiskundig verrassing: we krijgen een blad waarop behalve een kom rijst en de soep een achthoekige houten doos staat. Als je de deksel oplicht, zie je in deze *bentobakkie* vier compartimenten waarin de snacks kunstig gerangschikt zijn (zie foto 1). Dat maakt veel goed, want op je knieën de maaltijd gebruiken valt me niet mee.

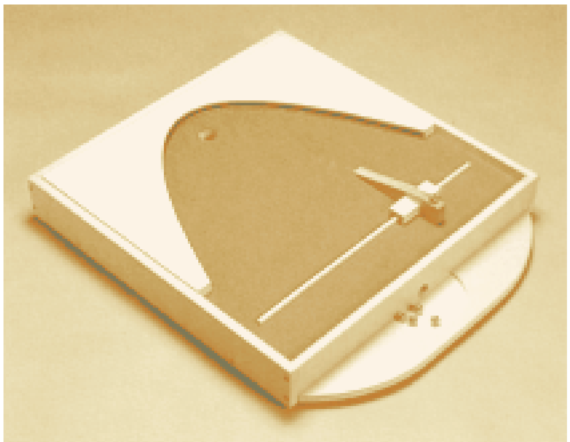
Wiskundeonderwijs in Japan

En hoe zit het met het wiskundeonderwijs in Japan?
In de internationaal vergelijkende studie TIMSS werd een wiskundeproefwerk aan leerlingen van dezelfde klassen in 40 verschillende landen gegeven. Iedereen kreeg dezelfde opgaven, alleen vertaald naar de eigen taal. De Japanse leerlingen, en ook leerlingen uit Singapore en Korea, scoorden significant beter dan de leerlingen uit de andere landen. Nederlandse leerlingen doen het ook heel goed in deze studie en ze behoren tot de top van de groep westerse landen, maar ze zijn niet zo goed als de Aziaten. Als we dit soort internationaal vergelijkende onderzoeken moeten geloven, dan is het peil van het wiskundeonderwijs in Japan dus hoog. De mogelijke reden ervoor is, dat Aziatische leerlingen al op vroege leeftijd aan het rekenen gaan. Ze beginnen gewoon eerder. Een gemiddeld vijfjarig Japans kind kan al tot 40 tellen, terwijl een leeftijdsgenootje in het westen gemiddeld niet voorbij 15 komt.
Ook besteden Japanse leerlingen gedurende hun schoolloopbaan veel tijd aan hun wiskundige vorming.
Naast school is er in Japan de *juku*, het naschoolse onderwijs in dagelijkse huiswerkklassen. In de rijkere families stelt men een bijlesleraar aan, die het maken van huiswerk dagelijks begeleidt. Ook tijdens de vakanties wordt er aan de stof doorgewerkt in *holiday school*. Tijdens de schoolvakantieperiode waarin onze conferentie viel, zagen we dan ook veel leerlingen in hun schooluniform naar hun holiday school gaan (leraren hebben niet echt lange vakanties dus). In Japan doen ze überhaupt weinig aan vakanties, de gemiddelde Japanse werknemer heeft slechts tweemaal per jaar één week vrij. Het gevolg van deze ‘non-vakantie-maatschappij’ is dat de leerlingen hun kennis en vaardigheden aardig op peil houden.
Elke leraar in Nederland weet dat je in september altijd weer flink de stof van het vorige schooljaar moet herhalen. In de zomervakantie zijn bij de Nederlandse leerlingen veel kennis en vaardigheden weggezakt. De Japanse collega’s hebben stukken minder werk aan deze opvijzeltaak, aangezien de kennis en vaardigheden van de leerlingen tussentijds minder konden wegzakken. Dat scheelt natuurlijk wel!

Bezoek aan een perfecte les

Maar is het wiskundeonderwijs in Japan kwalitatief nu zoveel beter? Tweemaal bezocht ik een Japanse les in de onderbouw van het voortgezet onderwijs. Beide keren was het allemaal in scène gezet voor de conferentiebezoekers uit het westen en wist ik dus dat het een *ideale* les was, met leraar en leerlingen als





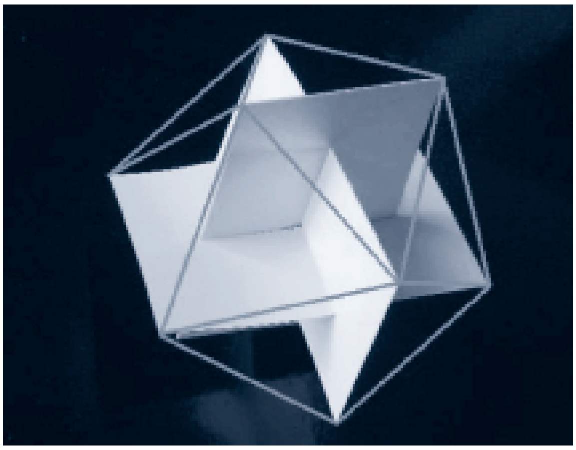
3

4

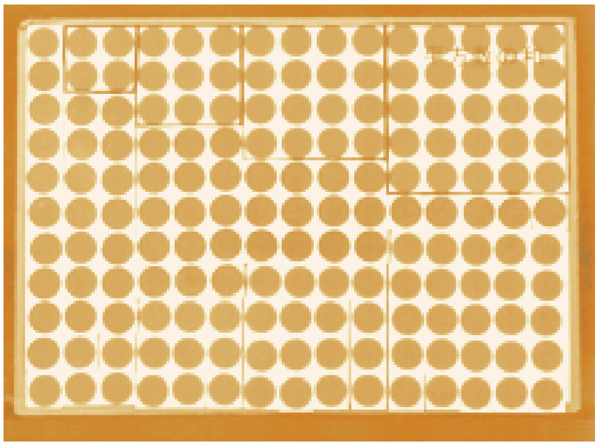
toneelspelers. De leraar had zich supergoed voorbereid, en de leerlingen hielden zich koest en clever vanwege de visite.
Dat tijdens de vakantieperiode zeven voltallige klassen van een school acte de présence gaven ten behoeve van het westerse conferentiebezoek, zegt natuurlijk wel weer iets over de discipline op de scholen. In Nederland was zoiets nooit te organiseren geweest.
Het was een idiote situatie omdat 40 leerlingen en 1 leraar werden geobserveerd door 60 conferentiegangers die op elkaar geperst achter in het lokaal zaten en niets verstonden. Toch vond ik het een unieke ervaring. De leraar deed iets té joviaal, maar de leerlingen van 13 jaar waren vrolijk genoeg dat ze de observanten soms totaal vergaten. Er werd een vast lesstramien gevolgd, dat ze in Japan de *open answer approach* noemen.
Ik herkende het later nog eens in een standaard formulier waarmee alle Japanse leraren hun lessen moeten voorbereiden. Het volgende voorgeschreven lijstje stond voor een les van 50 minuten:
- 5 minuten: een probleem, dat de leerlingen nog niet kennen, kort en bondig neerleggen ('problem posing').
- 15 minuten: leerlingen zelfstandig aan het probleem laten puzzelen ('students work on the problem').
- 15 minuten: centraalgeleide klassendiscussie ('students give their solutions').
- 15 minuten: leraar brengt alle discussielijnen bij elkaar en geeft een samenvatting ('teacher brings together the solutions').

Het was spectaculair om te zien dat de leerlingen meteen aan het begin van de les een kort, pakkend probleem kregen voorgelegd waaraan ze allemaal konden gaan zitten puzzelen. In de ene les gingen de brugklassers puzzelen aan breuken en hun decimale equivalent, met de vraag welke patronen in de decimalen dit oplevert. In de andere les moesten de leerlingen vijf stenen op een vel papier werpen, en een idee ontwikkelen voor de spreiding van de stenen. Er werd dus meteen vanaf het begin van de les een productieve activiteit van de leerlingen verwacht en ook zwakkere leerlingen konden hier goed in meekomen (die konden in ieder geval de vijf stenen werpen). Ook positief aan deze aanpak is, dat er altijd ruimte gemaakt wordt voor een grote variatie aan verschillende oplossingen van leerlingen. Het maakt het spannend voor de leraar die flexibel moet inspelen op de mogelijke antwoorden van de leerlingen.

Dat de Japanse organisatoren van de conferentie de buitenlandse gasten een fantastische indruk wilden geven, lag er iets te geforceerd bovenop. De conferentielocatie was erg chique, de PowerPoint-presentaties waren 'gelikt' en de forumdiscussie waarin bijdragen vanuit verschillende continenten tegelijk via satellietverbindingen op een groot beeldscherm verschenen, verliep bijna probleemloos. Hetzelfde gold voor de hierboven beschreven voorbeeldlessen die we te zien kregen. Maar een Japanse collega fluisterde me toe dat hun echte lessen heel vaak niet op deze ideale manier verlopen. Het ideale beeld is dus niet de echte dagelijkse



5



6

praktijk. In heel veel lessen wordt er gewoon gestampt, gedrild en hanteert men de methode ‘voordoen-nadoen’. Japanse leerlingen vinden wiskunde dan ook geen leuk vak. In de hiervoor al TIMSS-studie werd namelijk ook aan de leerlingen van de 40 landen naar hun mening over het vak wiskunde gevraagd (vind je wiskunde leuk, vind je wiskunde belangrijk, wil je later een vak kiezen waarin wiskunde nodig is, enz.). En met 47% van de leerlingen die aangaven wiskunde *niet* leuk te vinden, hoorde Japan tot de toplanden van leerlingen met een negatieve attitude tegenover wiskunde. Nederland scoorde met 43% ook hoog; dit in tegenstelling tot landen als Koeweit, Iran, Singapore en Thailand waar meer dan 80% van de leerlingen aangaf ons vak wèl leuk te vinden. Het zou interessant zijn nader te onderzoeken waar dat dan precies aan ligt.

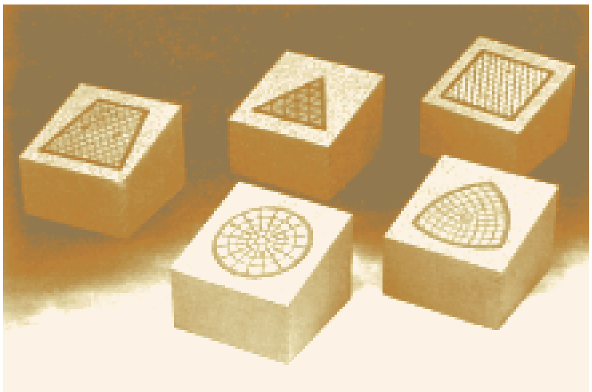
Let’s play with math

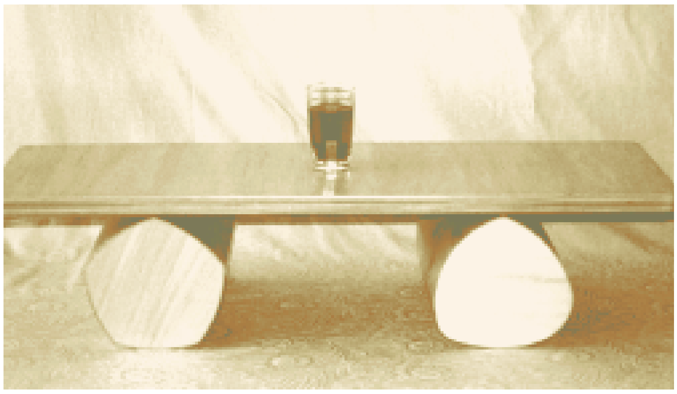
Terug naar mijn ervaringen in Japan. Parallel aan de conferentie over wiskundeonderwijs was een tentoonstelling ingericht waar kinderen wiskundige avonturen konden beleven. Een spandoek met Japanse karakters kondigde aan: ‘let’s play with math’. Een lange rij gezinnen stond voor de deur voor een dagje wiskundig vermaak, alsof het de Efteling betrof. Binnen waren allerlei ‘wisko’-activiteiten ingericht en opgewonden kinderstemmen vulden de hal. Bestuurbare robots moesten door een labyrint geloodst worden. Draaibare waterpompmechanieken gaven uitleg over het berekenen van een integraal. Ballen in felle kleuren snelden langs gootjes vanaf dezelfde hoogte (wat is sneller: de rechte lijn of een cycloïde?), blauw water in een perspex-model draaide rond als een roterende pythagoraspuzzel en illustreerde daarmee weer een nieuw bewijs van de beroemde stelling.
Kubusjes werden in koffers gepakt en kinderen probeerden er zoveel mogelijk in te passen (hoeveel 1×1 vierkanten passen in een vierkant van $3{,}9 \times 3{,}9$? Antwoord: 11) (zie foto 2).

De hoek met het biljart had een hoog succesgehalte. Een ellipsvormig biljarttafel met een bal in elk van de brandpunten leverde het vrolijke tafereel dat je altijd raakt schoot. En bij de ‘parabooltafel’ zorgde een gootje ervoor dat de stootrichting evenwijdig aan de parabool-as ook tot een succesvolle stoot leidde (zie foto 3 en 4).

Persoonlijk loop ik helemaal warm voor leermiddelen die simpel en goedkoop zijn, zoals deze drie kartonnetjes, die tot een driedimensionale figuur zijn te bouwen. Het resultaat herbergt bovendien een regelmatig 20-vlak als je de hoekpunten met elkaar verbindt (zie foto 5).

Kortom. Er was een tentoonstellingshal vol kleurrijke activiteiten, waar kinderen enthousiast aan het puzzelen en leren waren. Er was activerend materiaal waarmee leerlingen zelf konden ontdekken (‘learning material’) zoals de origami, de kubusjes-koffer en de tegel problemen (zie foto 6).





7

8

Daarnaast waren er allerlei apparaten waarmee je diverse wiskundige begrippen prachtig kan demonstreren. Een voorbeeld hiervan waren de vijf putdeksels (welke deksel kan niet naar binnen vallen?). De vierkante en driehoekige putdeksels vallen naar binnen, maar er zijn ook vormen die altijd in het gat blijven 'hangen' (zie foto 7).

De oplossing: de putdeksel moet een constante diameter hebben. Dat die putdeksel niet een cirkel hoefde te zijn, werd geïllustreerd met een model. Zelf zou ik het nog leuker hebben gevonden als ik dat soort dingen zelf zou kunnen ontdekken. Bij demonstraties wordt deze kans je natuurlijk wel ontnomen.
De bijbehorende driehoekige figuur heet een 'Reuleaux-driehoek' en ontstaat door vanuit de drie hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek een cirkelboog te maken.
Naast de opstelling van de putdeksels was een plank op twee balken geplaatst. Het glas water op de plank bleef in rust, omdat de Reuleaux-vorm ook gebruikt kan worden als wiel. Geheel tegen je intuïtie in blijkt de vloeistof in het glas niet te schudden omdat de plank steeds op constante hoogte blijft (zie foto 8).

Verbijsterd bij al die bonte wiskundedemonstraties vroegen wij ons als westerse toeschouwers af, of we bij 'ons' ook zo'n levendige en kleurrijke wiskundebeurs zouden kunnen organiseren.
Het antwoord ('ja, natuurlijk kunnen we het organiseren') nam echter niet de twijfel weg of er dan ook massaal gezinnen op af zouden komen.

PYTHAGORAS

EEN NIEUW WISKUNDETIJDSCHRIFT VOOR JONGEREN

Het zal niet nodig zijn voor de lezers van Euclides uiteen te zetten welke belangrijke rol de wiskunde speelt in de moderne maatschappij en dat het noodzakelijk is de belangstelling voor de wiskunde bij de studerende jeugd te stimuleren.

In verschillende landen wordt de jeugd geanimeerd zich met wiskundige problemen bezig te houden door middel van een tijdschrift. Zo vinden we in Frankrijk: Le Facteur X, in Engeland: The mathematical Pie en in de Verenigde Staten van Amerika: The Mathematical Student Journal. In deze tijdschriften worden artikelen gepubliceerd over moderne wiskundige onderwerpen en over de geschiedenis van de wiskunde. Verder wordt er een grote plaats ingeruimd voor puzzels en problemen.

De Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde van het Wiskundig Genootschap meent, dat het ook in ons land wenselijk en mogelijk is een dergelijk tijdschrift voor jongeren uit te geven.

Het eerste nummer van dit tijdschrift, dat we Pythagoras gedoopt hebben, zal binnenkort verschijnen.

Wil dit tijdschrift kans van slagen hebben, dan zal daarvoor ook een beroep moeten worden gedaan op de medewerking der docenten. De abonnementsprijs mag nl. niet te hoog worden. Deze is voor een groot deel afhankelijk van de verzendkosten. Men kan die zo laag mogelijk houden door de abonnementen via de school te doen lopen, zodat de verzending in aantallen kan plaatsvinden.

We zijn ons ervan bewust, dat dit enig extra werk voor de wiskundedocenten meebrengt, maar hierdoor kan een plan doorgevoerd worden, waarvan in bovengenoemde landen is gebleken, dat daarvoor veel belangstelling is bij de leerlingen.

Elk nummer zal bestaan uit 16 pagina's. De druk wordt verzorgd door J.B. Wolters' uitgeversmaatschappij. Abonnementen kunnen bij haar worden opgegeven.

De abonnementsprijs bedraagt voor leerlingen, die zich via de school abonneren f 2,00, voor anderen f 3,00 per jaargang van 4 of 5 nummers.

We hopen van harte, dat de wiskundedocenten dit initiatief van de Nederlandse Onderwijs Commissie voor Wiskunde willen steunen. Inlichtingen worden gaarne verstrekt door de beide redacteuren:

Bruno Ernst, Bosschendijk 2, Oudenbosch. Tel. 01652 - 726

G. Krooshof, Noorderbinnensingel 140 Groningen. Tel. 05900 - 32494

Aankondiging in Euclides 36 (1960-1961)

De inhoud van een

[W.C. Schaafsma]

Als je in 't donker 't lichtknopje kunt vinden ben je (er) thuis. De meeste ongelukken gebeuren op de trap.

Een felle lentezon wil de passagiers doen geloven dat het al lekker warm weer is. Maar op 't Zwolse Stationsplein vind ik 't gewoon hartstikke koud. Met een blos op het gezicht komen leerlingen een vragenblad bij me halen; uit een enkele jaszak steekt een rekenmachine omhoog. Tien minuten later komen de notoire telaatkomers zanikerig langzaam aanfietsen. Hoopvol vragen ze of ze nu een telaat-briefje bij de conciërge moeten ophalen.

Als voorbereiding op een wiskundeopdracht voor het mavo-3-kamp heb ik een vragenlijst rondom het Zwolse station gemaakt met als thema 'Wiskunde ligt op straat'. Dit is een verslagje (van een mislukking).

Op onze school worden per afdeling 'werkweken' georganiseerd. De werkweken van mavo-3 worden door de leerlingen met afschuw, en door de ouders met waardering, 'werkkampen' genoemd. De bedoeling is dat er tijdens deze week aan zoveel mogelijk vakken aandacht wordt besteed. Aardrijkskunde, natuurkunde, vreemde talen, biologie, godsdienst, wiskunde, enzovoort. Elk vak ligt op straat! Over 't algemeen zijn dit sobere kampen in jeugdherbergen, die niet verder dan België, Luxemburg of (het dichtbije) Duitsland reiken. De collega's die deze kampen organiseren en begeleiden, zijn knettergek. Ze besteden veel aandacht en tijd aan de voorbereiding. Vervolgens worden ze een week lang treiterend uit hun slaap gehouden en na afloop beweren ze ook nog eens enthousiast, dat 'ze dit jaar de leukste groep in jaren hebben meegemaakt'.

En ..., elk jaar gaan ze naar een andere bestemming, met andere programma's, andere voorbereiding!
Een jongen houdt zijn handen als een nestje voor zich uit, een meisje zet haar voet erin, een ander geeft haar een kontje. Triomfantelijk hangt ze tegen de lantaarnpaal aan en probeert met een geodriehoek de hoeken te meten van een achthoekig verkeersbord. Giechelend komt ze op 50 graden. De jongen vindt het allang best, met een rood hoofd van de inspanning kijkt hij om zich heen of de rest ook gezien heeft hoe sterk hij is. Helaas, alleen ik reageer: 'Je kan dat ook gewoon thuis uitrekenen!' Schouderophalend grijnst hij: 'We hebben nu toch een antwoord? Of is 't niet goed soms?' Mijn wedervraag: 'Zijn dat stompe hoeken of scherpe hoeken?', doet bij hem geen lichtje flikkeren.

De gemeente Zwolle heeft in grote ronde kuipen heel mooi symmetrisch tulpen geplant. Zo'n tweehonderd per kuip. Een leerling is aan het tellen. Als ik 'm vraag of hij geen andere manier weet om het aantal tulpen te bepalen, schiet een andere leerling hem te hulp: 'Je hoeft maar de helft te tellen, man.' 'Misschien nog minder,' probeer ik te helpen. 'Een kwart is ook al genoeg', zegt de behulpzame leerling.
Als ik de glazige blikken zie bij opmerkingen over slim tellen en schattend rekenen, weet ik dat er genoeg stof is voor de nabespreking. Eigenlijk was ik allang blij dat de tulpen nog niet uitgebloeid zijn, en de gemeenteambtenaren andere plantjes in de bakken hebben gezet. In Zwolle zijn ze daar namelijk nogal actief in.

Midden op de rotonde bij het station staat dochterlief op zaterdagmorgen in de kou te kleumen naast vader. Aagje klaagt niet, Aagje weet dat vader aan het werk is, vader maakt sommen. Aagje wordt volgend jaar een brugger. En misschien kan ze nu al een beetje begrijpen wat wiskunde is. Haar oudere zus heeft gezegd: 'Da's moeilijk denken.' Haar vader zegt: 'Da's verstandig denken.' 'Wat wordt nu het sommetje?', vraagt ze. 'De leerlingen moeten berekenen hoeveel stootblokken de gemeente op deze rotonde heeft geplaatst.'
Dat vindt Aagje gemakkelijk, ze rent naar beneden, en begint tellend langs de stootblokken te lopen.
Halverwege vangt vader haar op, ze is nog net niet uit

conifeer

de bocht gevlogen. 'Dommerd', zegt hij, 'dat moeten ze niet tellen, dat moeten ze berekenen, vanaf de zijkant.' Een paar weken later staan er steeds leerlingen bovenop de rotonde, ze hebben een drukke weg overgestoken, meestal zonder uit te kijken.
Thorbecke kijkt mij afkeurend aan.

De rector van onze scholengemeenschap is streng en onrechtvaardig: hij heeft een zwak voor mij. Elke keer als ik met een plannetje kom, luistert hij bereidwillig en meestal weet hij wel een budget te vinden om het plannetje ook financieel mogelijk te maken. Als hij het

wat bedenkt u toch stomme vragen

plannetje niks vindt, zegt hij dat niet, maar zal hij 'de administratie vragen of er nog een gaatje is'. Dat is er dan niet, weet ik al. Maar dit plannetje beviel hem wel. Later, enkele maanden na zijn afscheid, vertelde hij mij zijn criterium: als een leraar bereid is zelf tijd te stoppen ('substantieel', zei hij) in afwijkende lessen, dan wilde hij wel voor geld zorgen. Overheadprojectoren, video's, en filmapparatuur heeft hij jarenlang tegengehouden. 'Gemakzuchtige leraren', noemde hij de aanvragers.

Paula heeft een hekel aan wiskunde of beter: Paula heeft een hekel aan de wiskundeleraar. Het vorig jaar had ze een vrouw, en dat beviel haar beter. Die legde tenminste uit; deze knurft zeurt maar steeds van: 'eerst zelf proberen'. En dus kletst Paula veel tijdens de les of gaat ze ook zeuren. Paula zeurt nu weer: 'Ik snap er toch niks van.' Met een zucht vraagt de leraar: 'Wat snap je niet, Paula?' 'Op dit papier staat "Kijk naar het bord Alle richtingen". Waar is dat bord dan?' De leraar wijst het bord aan, Paula kijkt naar het bord, Paula leest de vraag op het stencil nog eens, kijkt weer naar het bord en zeurt: 'Maar er is toch niks mis met dat bord?' De leraar probeert: 'Zou dat bord naar het noorden, oosten, zuiden of westen wijzen?' 'Hoe kan ik dat nou weten ? Ik heb toch geen kompas bij me?' De leraar wijst met zijn arm en hand: 'Daar komt de zon op, daar gaat hij onder. Welke richting zal dat bord dan ongeveer wijzen?' 'Dat weet ik toch niet? "Alle richtingen" staat er op, dus hij wijst naar alle richtingen.' 'Kan een bord naar alle richtingen wijzen?', vraagt de leraar, 'dat bord wijst toch maar naar één richting?'
'Is dat het antwoord?', vraagt Paula, 'wat bedenkt u toch altijd stomme vragen.'
En gelijk heeft ze.

Met een brede glimlach onderbreekt Gerard een dictee tijdens een les Nederlands. 'Kijk eens, geregeld!', zegt hij, 'en Freudenthal betaalt alles.' Gerard werkt op de administratie, Gerard belt, vergelijkt prijzen, ritselt, bestelt en regelt. 'En ik heb ze ook al voor je genummerd.' Op mijn bureau wordt een plastic tasje met zo'n twintig weggooi-cameraatjes gezet. De leerlingen van deze klas hebben geen oog voor de fototoestelletjes, achteraf blijken ze allen het zinnetje 'De olifant dendert al toeterend door de porseleinkast' foutloos te kunnen schrijven. De wiskundeleerlingen van mavo-3 moeten tijdens de werkweek in het Belgische stadje Namen elk vier foto's maken. Bij elke foto moeten ze een wiskundesom bedenken, en het antwoord berekenen. Net zulke sommen als ze bij het station hebben gehad, of tijdens de lessen. Ik heb al gehoord dat ze allemaal een foto van elkaar gaan maken, voor een gebouw, lantaarnpaal, monument of wat dan ook. Dan kunnen ze met schattend rekenen de hoogte bepalen.
Over dat onderdeel zijn ze heel enthousiast.

Het Stationsplein van Zwolle is verworden tot een soort laadperron. Mensen worden er snel gedumpt door bussen, taxi's of particulieren. Er is geen gezellige bedrijvigheid, er zijn geen gezellige winkeltjes, er is sprake van efficiëntie. En *de* bank met dat mooie wiskundige logo heeft zijn gebouw geheel aangepast aan deze grauwe functionaliteit. De leerlingen moeten van dat mooie logo (dat op een raam is geplakt) de afmetingen bepalen. Het logo hangt ook hoog aan een

muur. Met behulp van de afmetingen van de bouwstenen moet ook van dat logo de afmetingen worden geschat. Wat is de vergrotingsfactor van de lengtes, en wat is de vergrotingsfactor van de oppervlaktes. Mijn leerlingen zijn in de weer met geodriehoeken. Hun vingers maken waarschijnlijk vlekken op de ruiten, want opeens wordt bruusk een gordijn opengeschoven en gebaart een gepakte en gedaste heer dat de leerlingen wegmoeten. Ik zie het, ik reageer niet, ik kijk zogenaamd de andere kant op. Paula begint wiskunde leuk te vinden. Paula blijkt opeens een geodriehoek te bezitten, en een potlood. Zij gaat het logo meten! Na een kort poosje komt een bankmevrouw naar buiten en vraagt haar op een 'u-staat-teveel-rood'-toon wat ze aan het doen is. Fier recht Paula haar rug en zegt: 'Dit is nou wiskunde.'

De wereld zou een saaie bedoening zijn als er alleen maar jongens waren als Maarten. Maarten is een eenvoudige, stille jongen. Zoon van een ex-boer -de boerderij nog middenin een nieuwbouwwijk-, enigszins stadsvreemd, hondstrouw en glunderend genietend bij elk complimentje. In de klas wil hij best samenwerken, maar meestal gaat dat hem te snel, en vindt hij zijn medeleerlingen te onnauwkeurig. Hij oogt heel kwetsbaar, maar ik heb nooit iets van pesterigheidjes kunnen ontdekken. Nogmaals, je moet er niet teveel van hebben, maar wat is het heerlijk als je dat soms in je klas aantreft. Aan het eind van de les fiets ik nog snel langs de Stationsstraat om te kijken of leerlingen niet expres achterblijven om de volgende les te laat te komen. Aan het eind van de straat ontwaar ik Maarten. Bij dat gebouw heb ik sommen gemaakt over tegelpatronen die in mozaïeken in de gevel zijn verwerkt. 'Maarten, je moet naar school, je komt te laat voor de volgende les', zeg ik. 'Nee,' zegt Maarten, 'de anderen moeten een overhoring inhalen die ik al gemaakt heb. Ik wil dit afmaken.'

Op een congres hoorde ik enthousiaste leraren van mavo-klassen dit in hun lessen toepassen: 'Door zelf sommen te formuleren tonen leerlingen wat ze echt geleerd hebben. En dat becijferen we.'
Daarna las ik over 'de wiskundetocht door Amsterdam'. Een wiskundetocht bij het station Zwolle, en de leerlingen zelf sommen laten bedenken aan de hand van foto's in een andere stad. Dat leek me wel een mooie combinatie voor de 'werkweken'. Maarten levert ook een werkstuk met foto's in. Maarten heeft pech gehad, er is een foto mislukt! Maar Maarten is niet stuk te krijgen, bij één foto bedenkt hij twee sommen. Op de voorpagina van zijn werkstuk staat hij in een park glunderend 'en profile' naast een kegelvormige conifeer. Natuurlijk heeft hij ook een sommetje bedacht dat gaat over het schatten van de hoogte van een voorwerp. Maar dan schrijft Maarten het volgende sommetje:
'Als ik maat 43 van schoenen heb, bepaal dan de breedte van de conifeer en bereken vervolgens de inhoud van de conifeer.'
Als ik het werkstuk aan hem teruggeef en hem vraag wat nou het nut is van deze som, kijkt hij me verbaasd aan.

Het was niet slecht toeven op een nascholingscursus in Utrecht: er waren genoeg koffie- en rookpauzes en ook het lunch-gedeelte was voortreffelijk verzorgd. Dat viel niet in goede aarde bij Joop van der Weijden. Joop vond het maar niks: al die geldverspilling, al die tijd-verspilling. Hij gaf al twintig jaar wiskunde, en goed. Joop vond lesgeven leuk, en zijn leerlingen vonden zijn lessen leuk. Al twintig jaar haalde hij hoge cijfers op de eindexamens. Wie niet werken wil, zoals hij dat wil, kan d'r uit, en dat werkte. 'De schoolleiding en de wiskunde-sectie hadden hem verplicht om naar deze cursus te gaan. Hij zat nu wel in ons werkgroepje, maar hij was niet van plan zich in te spannen', zei hij tegen mijn grijze haren, hopend een medestander gevonden te hebben. Gelukkig was er ook jong onderwijsspul in ons groepje. Met enthousiasme werd deze Hollandse

Als ik maat 43 van schoenen heb, ...

Wiskundelinie bevochten, maar Joop bleef mokken en tegenwerken. 'Werkstukken bij wiskunde, waardeloos. Geef die kerels lekkere wiskundesommen, en becijfer dat' en Joop bleef bij zijn standpunt: als jullie aan deze opdracht willen werken, best, maar hij zat er voor het certificaatje, en dat kreeg hij toch wel. 'Laten ze de kosten van deze dure bijeenkomsten in mijn salaris stoppen, dan ...'
Toen vond ik 't welletjes, ook ik begon op hem in te praten en te redeneren. Tot mijn verbazing betrapte ik mezelf erop dat ik hem een enkele keer 'Paula' noemde. Misschien deed ik 't niet eens echt, maar wel in gedachten ....

Tussen Zwolle en Wezep was een coniferen- en buxus-kwekerij. 'Paula' schijnt een weerbarstige, maar eenmaal geworteld, prachtige conifeer op te leveren. De kwekerij is opgeheven, het is een gipsenbeelden-centrum geworden. U kent ze wel, rijen egels, zwanen, kabouters. Ik zie zelfs dertig statige kikkers op een rijtje. En Maarten, ach leuter toch niet over cijfers, Maarten had allang een negen, Maarten had namelijk het patroon in die mozaïeken ontdekt ....

Conferentie ICT in het wiskundeonderwijs

In een breed samenwerkingsverband met onder andere het Freudenthal Instituut en APS-wiskunde wordt op

donderdag 26 april 2001
een conferentie georganiseerd over het gebruik van informatie- en communicatietechnologie (ICT) in het wiskundeonderwijs.

Op deze conferentie staat het directe gebruik van ICT in de wiskundeles centraal. In parallelsessies zullen voorbeelden worden getoond van diverse mogelijkheden van het gebruik van ICT.
Ook kunnen ervaringen worden uitgewisseld over de vele initiatieven die op dit gebied al op allerlei scholen plaatsvinden. Hierdoor kunt u zich een beeld vormen van de kracht en van de gevaren bij de inzet van technologie in uw wiskundelessen.
In computerlokalen kunt u zelf aan de slag met software en andere ICT-toepassingen die tijdens parallelsessies worden getoond en genoemd.

Datum en locatie

Donderdag 26 april 2001 te Utrecht, van 9.30 tot 16.00 uur

Doelgroep en kosten

Maximaal 150 docenten wiskunde voortgezet onderwijs, met interesse in en/of affiniteit met ICT.
De prijs van de conferentie is f 450,- per persoon.

Meer informatie

Meer informatie over deze conferentie kunt u in de loop van het schooljaar 2000-2001 vernemen via Euclides, de Nieuwe Wiskrant, WiskundE-brief, de januari-mailing van APS-wiskunde.
Inschrijfformulieren zijn aan te vragen bij Yolanda Velo, APS-wiskunde, tel. 030-2856722.
Ter voorbereiding van en voor verdere informatie over de conferentie wordt gebruik gemaakt van de speciale website: *www.fi.uu.nl/ict2001*.

Nascholingscursus Kansrekening en Computersimulatie voor wiskundedocenten vwo

De afdeling Econometrie van de Vrije Universiteit te Amsterdam verzorgt een nascholingscursus Kansrekening en Computersimulatie voor wiskundeleraren in de bovenbouw van het VWO.
De cursus is op woensdag 24 januari 2001
van 16.15-19.45 uur.

Nadere informatie omtrent inhoud en inschrijving is te vinden op
http://www.econ.vu.nl/ectrie (klik dan op VWO scholen).

Oplossingen, nieuwe opgaven en correspondentie over deze rubriek
aan Jan de Geus Valkenboslaan 262-A 2563 EB Den Haag

Als we drie vierkanten met respectievelijk oppervlakte 52, 58 en 202 twee aan twee met de hoekpunten tegen elkaar leggen, dan omsluiten ze een driehoek. De vraag zal dan meestal luiden om de oppervlakte van deze driehoek uit te rekenen. (zie figuur)

De meeste mensen zullen, denk ik, met behulp van de rekenmachine een hoek α uitrekenen:

$$52 = 58 + 202 - 2\sqrt{58}\cdot\sqrt{202}\cdot\cos\alpha$$

Terwijl deze α nog in de rekenmachine zit, kunnen we de oppervlakte simpel uitrekenen met

$$\textit{Oppervlakte driehoek} = \tfrac{1}{2}\sqrt{58}\cdot\sqrt{202}\cdot\sin\alpha$$

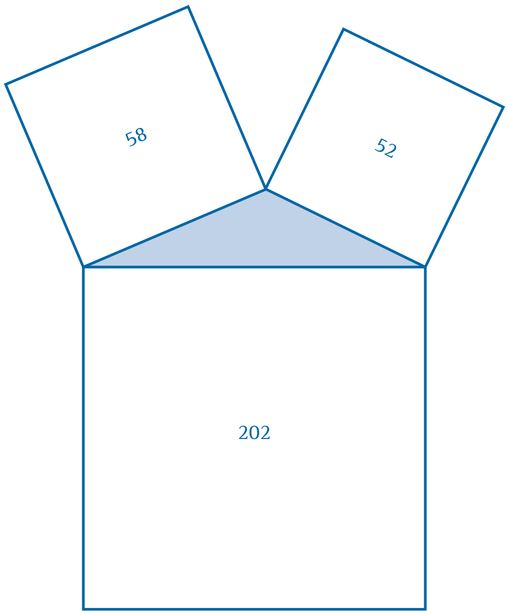
Maar nu komt de verrassing, vind ik.
Hoewel de zijden van de driehoek irrationaal zijn, geeft de rekenmachine EXACT 15 als antwoord!
Dat vraagt om een nader onderzoek!

Het leuke van een puzzelrubriek is, dat we onze eigen spelregels mogen maken. Daarom als opgave deze maand:

Bereken de oppervlakte van de driehoek met elementaire vlakke meetkunde. Dus beslist geen goniometrie!

Als tip kan dienen:
Bedenk dat de drie gegeven getallen *niet* zomaar willekeurig gekozen zijn. Als er dan ook nog een andere tekening wordt gemaakt, dan kan de oppervlakte zelfs ‘uit het hoofd’ worden uitgerekend.

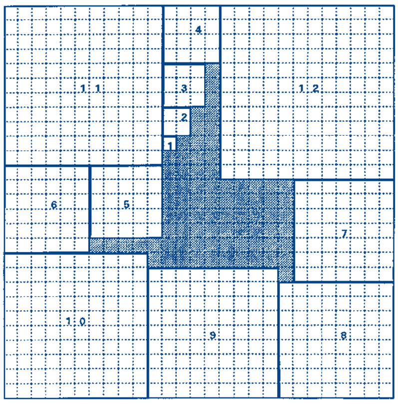
Heeft u een idee? Stuur het binnen een maand in en u doet mee met de doorlopende ladder-wedstrijd waar u bijvoorbeeld nu mee kunt beginnen.
Er zijn met deze oppervlakteberekening maximaal vijf punten te verdienen.

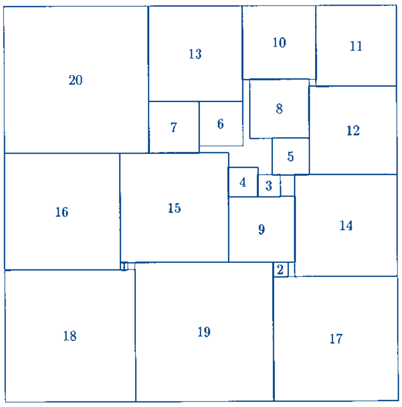


Oplossing 702

In het speciale nulnummer stond een niet zo moeilijke opgave. Alle inzenders vonden vrijwel moeiteloos de gevraagde oplossing en sommigen gingen zelfs nog verder. En dan blijkt dat het eigenlijk een zeer interessant probleem is, waarbij het voor grotere waarden een nog *onopgelost* probleem is.

Voor $n = 12$ ziet u de fraaie tekening (links) van *Peter Meijer* (50 punten), Maarssen.
Harm Bakker (35 punten), Marum, ging door tot en met $n = 20$. De twintig vierkanten blijken in een 54 bij 54 vierkant te passen. Er is nog maar zeer weinig ruimte over (rechts)!





In de opgave moesten de opeenvolgende vierkanten $1^2, 2^2, 3^2, ..., n^2$ in het *kleinste* vierkant gelegd worden. Uiteraard moeten de stukjes 'recht' liggen en niet over elkaar heen. In de opgave stonden de tekeningen voor de eerste zes waarden van n. Tot en met $n = 12$ wordt het steeds lastiger om de vierkanten passend in het kleinste(?) vierkant te krijgen. Na enig zoeken vonden alle inzenders de volgende oplossing:

Op internet vinden we meer informatie.
Neil J.A. Sloane werkt bij AT&T Shannon Lab in Florham Park, NJ. Op zijn website (*http://www.research.att.com/~njas/sequences/*) vinden we de 'On-Line Encyclopedia of Integer Sequences'. Onder ID-Number A005842 staat onze reeks: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 43, 47, 51, 54, 58, 63, 67, 71.
De eerste 24 vierkanten passen dus inderdaad in een 71 bij 71 vierkant.
Voor $n > 24$ is het probleem nog ONOPGELOST!

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
kleinste vierkant heeft zijde	1	3	5	7	9	11	13	15	18	21	24	27

Na loting ontvangen de volgende tien inzenders een boekenbon van *f* 25,-:

Tamme Afman (17 punten), Heerde

Harm Bakker (35 punten), Marum

Wilma den Boer (55 punten), Gouda

Ad Boons (54 punten), Tilburg

Gé Groenewegen (34 punten), Nijmegen

Peter Meijer (50 punten), Maarssen

Kees Nagtegaal (9 punten), Dordrecht

Leo H. van den Raadt (40 punten), Heemstede

Jos Remijn (13 punten), Den Haag

Jan Verbakel (5 punten), Eindhoven

Met 55 punten is winnares van een boekenbon van *f* 50,-:

Wilma den Boer
Joh. Poststraat 142
2806 KC Gouda

Heel hartelijk gefeliciteerd!

Service pagina

Kalender

In deze kalender kunnen alle voor wiskunde-docenten toegankeljke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Wil eenieder die relevante data heeft, deze zo spoedig mogelijk door geven aan de hoofdredacteur. Hieronder treft u de verschijningsdata aan van Euclides in het komende schooljaar. Achter de verschijningsdata is de deadline voor het inzenden van mededelingen vermeld. Doorgeven kan ook via
e-mail: *redactie-euclides@nvvw.nl*

nr	verschijnt	deadline
4	06 januari 2001	16 november 2000
5	17 februari 2001	04 januari 2001
6	31 maart 2001	15 februari 2001
7	16 mei 2001	29 maart 2001
8	27 juni 2001	10 mei 2001

zaterdag 6 januari 2001
Wintersymposium Wiskundig Genootschap
Zie p. 123 in dit nummer.

zaterdag 20 januari 2001
7e Mathematische Modelleercompetitie
Universiteit Maastricht
043-3883834
Zie ook p. 114 in dit nummer.

di. 23 t/m za. 27 januari 2001
NOT2001 - Onderwijs 3-dimensionaal
Nationale Onderwijs Tentoonstelling, Jaarbeurs, Utrecht

vr. 2 en za. 3 februari 2001
Nationale Wiskunde Dagen
030 2611611
Zie Euclides 75-8, p. 281.

donderdag 15 februari 2001
Gebruikersdag Netwerk

vrijdag 16 februari 2001
Gebruikersdag Moderne wiskunde

vrijdag 16 maart 2001
Kangoeroe 2001
Aankondiging volgt later.

donderdag 26 april 2001
Conferentie ICT in het wiskundeonderwijs
Organisatie APS en Freudenthal Instituut
Zie ook p. 141 in dit nummer.

woensdag 16 mei 2001
Examens vwo B (os), vwo B1 en vwo B12 (ns)
maandag 21 mei 2001
Examens mavo/vbo C/D
woensdag 23 mei 2001
Examens havo A (os), havo A12 (ns)
woensdag 30 mei 2001
Examens havo B (os), havo B1 en havo B12 (ns)
donderdag 31 mei 2001
Examens vwo A (os), vwo A1 en vwo A12 (ns)
(os=oude stijl; ns=nieuwe stijl)

woensdag 20 juni
Examens 2e tijdvak

zaterdag 26 mei 2001
Symposium Historische Kring Reken- en Wiskundeonderwijs (HKRWO)
Hogeschool Domstad, Utrecht
Aankondiging volgt later.

Voor internet-adressen zie de website van de NVvW:
http://www.nvvw.nl/Agenda2.html

Publicaties van de
Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

* Zebra-boekjes
1. Kattenaids en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi

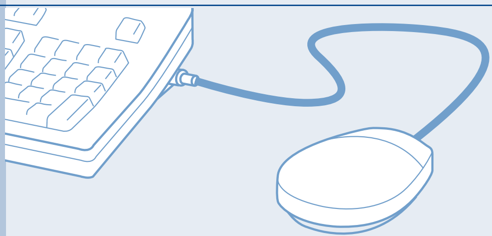
Prijzen van de Zebra-boekjes:
Schoolabonnement: 6 exemplaren van 5 delen voor f 400,-
Individueel abonnement voor leden: f 75,-
Losse boekjes voor leden: f 16,50
Deze bedragen zijn inclusief verzendkosten.
Bestellen kan door het juiste bedrag over te maken op Postbanknummer 5660167 t.n.v. Epsilon Uitgaven te Utrecht onder vermelding van Zebra (1 t/m 5) of Zebra (6 t/m 10).
Zelf ophalen kan in de losse verkoop: ledenprijs op bijeenkomsten f 12,50; in de betere boekhandel f 16,75.

* Nomenclatuurrapport Tweede Fase havo/vwo
Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie, zie colofon.

* Wisforta - wiskunde, formules en tabellen
Formule- en tabellenboekje met formulekaarten havo en vwo, de tabellen van de binomiale en de normale verdeling, en toevalsgetallen.
ISBN 900165956X; prijs f 15,00; te bestellen in de boekhandel

Uitdagend en dynamisch

Wiskunde software van Wolters Noordhoff



geschikt voor alle wiskundemethoden

- Deze software verhoogt het inzicht en de begripsontwikkeling van de leerling
- Is geschikt voor Novell-en Windows NT-netwerken
- Werkt onder Windows 95, 98 en Windows ME

voor alle onderwijstypen

VUStat

voor alle onderwijstypen

VUGrafiek

havo/vwo bovenbouw

Dynasys

havo/vwo bovenbouw

VUDif

havo/vwo bovenbouw

ORStat

Vraag nu de brochure aan over
de wiskunde software van
Wolters-noordhoff!
e-mail: voorlichting.vo.exact@wolters.nl

Ook verkrijgbaar via de boekhandel

Wolters-Noordhoff
Postbus 58
9700 MB Groningen
Tel: (050) 522 63 11
Fax: (050) 522 62 55

Wolters Noordhoff

420/0519